Prof. Dr. R. Schrader
Birgit Engels [engels@zpr.uni-koeln.de]

WS 2006/2007

Theoretische Informatik

8. Übung, Abgabe Mittwoch, 13.12.2006

Aktuelle Informationen bezüglich der Vorlesung und der Übungen finden sich unter :
http://www.zaik.uni-koeln.de/AFS/teachings/courses/ThInf/index.html und
http://www.zaik.uni-koeln.de/AFS/teachings/courses/ThInf/uebungen.html

Aufgabe 30 (IP — Arithmetisierung Boolscher Formeln — 6 Punkte):
In der Vorlesung wurde folgende *Arithmetisierung* für boolsche Formeln vorgestellt:

Boolscher Ausdruck	Arithmetischert Ausdruck
Literal $l_i = x_i$	$A_{l_i} = 1 - z_i$
Literal $l_i = \neg x_i$	$A_{l_i} = z_i$
$C_i = l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3}$	$A_{C_i} = 1 - A_{l_{i1}} A_{l_{i2}} A_{l_{i3}}$
$\alpha = \bigwedge C_i$	$A_f = \prod A_{C_i}$

a) Arithmetisieren Sie folgenden Boolschen Ausdruck f zu A_f:

$$f = (x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3)$$

b) Ist A_f erfüllbar? Zeigen Sie dies durch sukzessive Berechnung von A_f^0 mittels $A_f^{i-1}(z) = A_f^i(0) + A_f^i(1)$!

c) Simulieren Sie den Ablauf des Interaktiven Nachweises für **co3SAT** an A_f über 3 Runden.

Aufgabe 31 (IP — Arithmetische Gleichungen — 4 Punkte):
Im Beweis $coNP \subseteq IP$ aus der Vorlesung wurde ein interaktiver Nachweis für folgende Fragestellung entworfen:

Gegeben ein multivariates Polynom p mit Grad $\leq d$ gilt:

$$\sum_{z_1=0}^{1} \sum_{z_2=0}^{1} \cdots \sum_{z_n=0}^{1} p(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0?$$

Bitte wenden!

Modifizieren Sie den interaktiver Beweis aus der Vorlesung so, dass des Wertes “0“ ein beliebiger ganzzahliger Wert a auf Gleichheit getestet werden soll:

$$A_f = \sum_{z_1=0}^{1} \sum_{z_2=0}^{1} \dots \sum_{z_n=0}^{1} p(z_1, z_2, \dots, z_n) = a?$$

Aufgabe 32 (PCP vs. NEXPTIME — 6 Punkte):
Die Komplexitätsklasse $NEXPTIME$ ist wie folgt definiert:

> **NEXPTIME** ist die Klasse aller (Entscheidungs-)Probleme, die von einer nichtdeterministischen Turingmaschine in Zeit $O(2^{p(n)})$ entschieden werden können.

Es ist leicht zu sehen, dass gilt $PCP(r(n), q(n)) \subseteq NEXPTIME$. Dies kann allerdings wie folgt verschärft werden. Zeigen Sie:

$$L \in PCP(r(n), q(n)) \Rightarrow \exists\ NDTM\ die\ L\ in\ O(2^{r(n)+\log n})\ Zeit\ entscheidet.$$

Aufgabe 33 (PCP — Nichtapproximierbarkeit — 4 Punkte):
Zeigen Sie (mittels lückenerhaltender Reduktion von **Max3Sat**), dass die Berechnung einer $(1+\epsilon)$-Approximation für unabhängige Menge **UM** NP-schwer ist.
Hinweis: Beachten Sie die lückenerhaltende Reduktion von **Max3Sat** auf **Clique** sowie die polynomielle Reduktion von **3SAT** auf **UM**.