

Prof. Dr. U. Faigle

## Vorlesung Mathematische Programmierung (SS 2003)

### 0. Grundlagen aus der Analysis und linearen Algebra

Dieses Kapitel fasst die wesentlichen Voraussetzung aus der reellen Analysis und der linearen Algebra zusammen.

#### 1. Reelle Analysis in einer Variablen

Da nichtlineare Funktionen im allgemeinen rechnerisch schwierig zu behandeln sind, wird man immer versuchen, diese durch relativ einfache Funktionen zu approximieren. Dazu benutzt man in der Optimierung vor allem lineare oder quadratische Polynome (alles andere wäre rechnerisch zu aufwendig).

In diesem Abschnitt werden die entsprechenden Vorgehensweisen im eindimensionalen Fall kurz zusammengestellt. Der allgemeine ( $n$ -dimensionale) Fall wird sich dann mit Hilfe der linearen Algebra (dem eigentlichen Handwerkszeug des praktischen Rechnens) in der Vorlesung behandeln lassen.

**1.1. Approximation und die LANDAU-Notation.** Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine reelle Funktion und  $k \geq 0$  eine natürliche Zahl. Wir benutzen die sog. LANDAU-Notation und schreiben

$$(1) \quad f(t) \in o(|t|^k) \quad :\Leftrightarrow \quad f(0) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|f(t)|}{|t|^k} = 0.$$

Mit  $\varphi(t) = |t|^{-k} f(t)$  (für  $t \neq 0$ ) kann (1) auch so ausgedrückt werden:

$$f(t) = |t|^k \varphi(t), \quad \text{wobei} \quad \varphi(0) := \lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = 0.$$

BEMERKUNG.  $o(|t|^k)$  ist ein Vektorraum von Funktionen. Man verifiziert nämlich sofort:

$$f, g \in o(|t|^k) \text{ und } \lambda \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad f + g \in o(|t|^k) \text{ und } \lambda f \in o(|t|^k).$$

Gilt  $(f - g) \in o(|t|^k)$  für die Funktionen  $f$  und  $g$ , so schreibt man auch

$$\boxed{f(t) = g(t) + o(|t|^k) \quad \text{bzw.} \quad f(t) = g(t) + |t|^k \varphi(t), \text{ wobei } \varphi \in o(1).}$$

und sagt: „ $g$  approximiert  $f$  (lokal) bei  $t_0 = 0$  mit Ordnung  $k$ .“ In diesem Fall gilt insbesondere  $f(t_0) = g(t_0)$ .

LEMMA 0.1.  $f \in o(|t|^k) \quad \Longrightarrow \quad f \in o(|t|^{k-1})$  für alle  $k \geq 1$ .

Bew.  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|f(t)|}{|t|^{k-1}} = \lim_{t \rightarrow 0} |t| \cdot \frac{|f(t)|}{|t|^k} = 0.$

◇

In der nichtlinearen Optimierung interessiert man sich (aus Gründen der Recheneinfachheit) vor allem für lokale Approximationen mit Polynomen. Wiederum aus Gründen der

Recheneinfachheit beschränkt man sich auf den Fall  $k \leq 2$ . Für die approximierenden Polynome  $p(t) \in \mathbb{R}[t]$  sind damit genau die folgenden Fälle relevant:

- (0)  $p(t) = a_0$  (d.h.  $p(t)$  konstant, vom Grad 0).
- (i)  $p(t) = a_0 + a_1 t$  (d.h.  $p(t)$  linear, vom Grad 1).
- (ii)  $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$  (d.h.  $p(t)$  quadratisch, vom Grad 2).

**1.2. Stetigkeit.** Wir betrachten den Fall  $k = 0$  (d.h.  $o(|t|^0) = o(1)$ ). Dann hat man

$$f(t) = a_0 + o(1) \quad (a_0 \in \mathbb{R}) \quad \longleftrightarrow \quad f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = a_0,$$

was gleichbedeutend mit der Stetigkeit der Funktion  $f$  bei  $t_0 = 0$  ist. Allgemeiner heisst  $f$  stetig im Punkt  $t_0 \in \mathbb{R}$ , falls

$$f(t_0 + t) = f(t_0) + o(1) \quad \text{d.h.} \quad f(t_0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t_0 + t).$$

**THEOREM 0.1** („Zwischenwertsatz“). *Seien  $a < b$  reelle Zahlen und sei die Funktion  $f$  stetig bei jedem  $a \leq t_0 \leq b$ . Dann existiert zu jedem  $f(a) \leq \xi \leq f(b)$  ein  $\bar{t} \in [a, b]$  derart, dass*

$$f(\bar{t}) = \xi.$$

*Bew.* Der Zwischenwertsatz ist äquivalent zur Definition reeller Zahlen über Intervallschachtelungen, die man über Intervallhalbierungen erreicht. Man beginnt mit  $a_0 = a$  und  $b_0 = b$  und iteriert:

$$r_n := \frac{a_n + b_n}{2} \quad \Longrightarrow \quad [a_{n+1}, b_{n+1}] := \begin{cases} [r_n, b_n] & \text{falls } f(r_n) \leq \xi, \\ [a_n, r_n] & \text{falls } f(r_n) > \xi. \end{cases}$$

Sei  $\bar{t} = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n$ . Dann gilt nach Konstruktion (und der vorausgesetzten Stetigkeit von  $f$ ):

$$f(\bar{t}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = \xi$$

◇

**BEMERKUNG.** Der Beweis des Zwischenwertsatzes ist konstruktiv und praktisch effizient in dem Sinn, dass in jedem Iterationsschritt das Fehlerintervall  $[a_n, b_n]$  für das gesuchte  $\bar{t}$  halbiert wird.

**THEOREM 0.2** („Satz von Weierstrass“). *Sei  $f$  stetig bei jedem Punkt des abgeschlossenen Intervalls  $[a, b]$ . Dann existiert ein  $\bar{t} \in [a, b]$  mit der Eigenschaft*

$$f(\bar{t}) = \min_{a \leq t \leq b} f(t).$$

*Bew.* Auch die Aussage dieses Satzes ist eine direkte Folgerung aus der Definition der reellen Zahlen. Wir setzen ähnlich wie beim Beweis des Zwischenwertsatzes

$$r_n := \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{und} \quad [a_{n+1}, b_{n+1}] := \begin{cases} [r_n, b_n] & \text{falls } \inf_{[r_n, b_n]} f(t) = \inf_{[a, b]} f(t), \\ [a_n, r_n] & \text{falls nicht} \end{cases}$$

und schliessen wie zuvor

$$\bar{t} = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n \quad \Longrightarrow \quad f(\bar{t}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = \inf_{[a, b]} f(t).$$

◇

**BEMERKUNG.** Der Satz von Weierstrass beweist nur die abstrakte Existenz eines Infimums der stetigen Funktion  $f$  als reelle Zahl. Der Beweis ergibt keine praktische Handhabe dafür, wie man ein geeignetes  $\bar{t}$  (approximativ) berechnen könnte.

**1.3. Differenzierbarkeit.** Wir betrachten den Fall  $k = 1$  und

$$f(t) = a_0 + a_1 t + o(|t|)$$

mit  $a_0 = f(0)$ . Wegen  $f(t) - f(0) = a_1 t + o(|t|)$  schliesst man dann

$$a_1 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} =: f'(0) .$$

$f$  ist also differenzierbar bei  $t_0 = 0$ . Allgemeiner heisst  $f$  *differenzierbar* bei  $t_0$ , falls

$$(2) \quad f(t_0 + t) = f(t_0) + f'(t_0)t + o(|t|) \quad \text{mit} \quad f'(t_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + t) - f(t_0)}{t} .$$

Setzt man  $g(t) = f(t_0 + t)$ , so ist also  $f$  *differenzierbar* bei  $t = t_0$  genau dann, wenn  $g$  differenzierbar bei  $t = 0$  ist.

BEMERKUNG. Die Definition der Differenzierbarkeit von  $f$  bei  $t_0$  in der Form (2) heisst auch *Formel von TAYLOR*.

**1.4. Das Extremalprinzip und die kritische Gleichung.** Für die Optimierungstheorie fundamental ist folgende Folgerung aus der Definition der Differenzierbarkeit.

LEMMA 0.2 („Extremallemma“). Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar im Punkt  $t_0$ . Falls  $f'(t_0) > 0$  gilt, dann existiert ein  $\delta > 0$  derart, dass

$$f(t_0 - t) < f(t_0) < f(t_0 + t) \quad \text{für alle } 0 < t \leq \delta .$$

Bew. Nach Voraussetzung haben wir

$$f(t_0 + t) = f(t_0) + t f'(t_0) + |t| \varphi(t) \quad \text{mit} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = 0 .$$

Im Fall  $f'(t_0) > 0$  existiert folglich ein  $\delta > 0$  derart, dass für alle  $0 < |t| \leq \delta$ :

$$|\varphi(t)| < f'(t_0) \quad \text{d.h.} \quad |t| \cdot |\varphi(t)| < |t| \cdot |f'(t_0)| .$$

◇

Aus dem Extremallemma folgt (bei differenzierbarem  $f$ ) bezüglich der Optimierungsaufgaben

$$\min_{t \in \mathbb{R}} f(t) \quad \text{oder} \quad \max_{t \in \mathbb{R}} f(t) ,$$

dass  $t_0 \in \mathbb{R}$  keine optimale Lösung sein kann, wenn  $f'(t_0) \neq 0$  gilt! Oder anders ausgedrückt: Eine *notwendige* Bedingung für die Optimalität von  $t_0$  ist das Erfülltsein der sog. *kritischen Gleichung*

$$(3) \quad \boxed{f'(t_0) = 0}$$

Eine Lösung  $t_0$  der kritischen Gleichung heisst *kritischer Punkt* der Funktion  $f$ .

BEMERKUNG. Die Gültigkeit der kritischen Gleichung ist im allgemeinen **nicht** ausreichend für die Optimalität einer Lösung! Trotzdem wird man typischerweise in einem ersten Ansatz immer versuchen wollen, kritische Punkte als Kandidaten für Optimallösungen zu berechnen. (Dies ist eine durchaus alles andere als triviale Aufgabe!)

Eine andere Folgerung aus dem Extremallemma ist:

THEOREM 0.3 („Mittelwertsatz“). Sei  $a < b$  und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig auf ganz  $[a, b]$  und differenzierbar bei jedem inneren Punkt  $a < t_0 < b$ . Dann existiert ein innerer Punkt  $a < \bar{t} < b$  mit der Eigenschaft

$$f(b) - f(a) = f'(\bar{t})(b - a).$$

Bew. Wir betrachten die Funktion  $g(t) = (b - a)f(t) - [f(b) - f(a)]t$  und beobachten

$$g(a) = g(b).$$

Wie  $f$  ist auch  $g$  differenzierbar. Ist  $g$  konstant auf  $[a, b]$ , dann folgt aus

$$0 = g'(t) = (b - a)f'(t) - f(b) + f(a)$$

die Behauptung. Im anderen Fall gebe es etwa ein  $t \in [a, b]$  mit (oBdA)  $g(t) < g(a) (= g(b))$ .

Nach dem Weierstrass'schen Satz existiert ein  $a < \bar{t} < b$  mit

$$g(\bar{t}) = \min_{[a, b]} g(t).$$

Nach dem Extremalprinzip muss  $g'(\bar{t}) = 0$  gelten, woraus die Behauptung wie zuvor folgt.  $\diamond$

**1.5. Quadratische Approximation.** Im Fall  $k = 2$  betrachten wir die lokale Approximation von  $f$  (bei  $t_0 = 0$ ) durch ein quadratisches Polynom:

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + o(|t|^2)$$

Aus  $a_0 = f(0)$  und  $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + o(|t|)$  folgert man sofort

$$a_1 = f'(0).$$

Wie man erwarten würde, berechnet sich der Koeffizient  $a_2$  aus der zweiten Ableitung von  $f$  (sofern diese in geeigneter Weise existiert).

LEMMA 0.3. Sei  $\delta > 0$  so, dass  $f$  auf dem offenen Intervall  $U = (-\delta, \delta)$  zweimal differenzierbar ist. Dann gibt es zu jedem  $t \in U$  ein  $0 < \theta < 1$  mit der Eigenschaft

$$f(t) = f(0) + t f'(0) + \frac{t^2}{2} f''(\theta t).$$

Bew. Sei (oBdA)  $t > 0$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$  (der genaue Wert von  $\alpha$  wird unten festgelegt). Wir betrachten die differenzierbare Funktion  $g : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$g(x) = f(x) - [f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} \alpha].$$

Nun gilt  $g(0) = 0$  und  $g'(0) = 0$ . Wir wählen  $\alpha$  so, dass sich auch  $g(t) = 0$  ergibt. Zu zeigen ist die Existenz von  $\theta$  mit der Eigenschaft  $\alpha = f''(\theta t)$ .

Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein  $0 < t_1 < t$  derart, dass  $g'(t_1) = 0$ . Nun wenden wir nochmals den Mittelwertsatz (diesmal bzgl.  $g'$ ) an und schliessen auf ein  $0 < t_2 < t_1$  mit der Eigenschaft

$$0 = g''(t_2) = f''(t_2) - \alpha.$$

Mit  $\theta t = t_2$  ergibt sich  $0 < \theta < 1$  und somit die Behauptung.  $\diamond$

BEMERKUNG. Die Darstellung von  $f(t)$  in Lemma 0.3 ist die sog. TAYLORSche Formel für zweimal differenzierbare Funktionen. Völlig analog ergibt sich im Falle der  $k$ -fachen Differenzierbarkeit:

$$f(t) = f(0) + t f'(0) + \dots + \frac{t^k}{k!} f^{(k)}(\theta t).$$

Wie oben bemerkt, ist schon der Fall  $k = 2$  für praktische Optimierungszwecke ausreichend kompliziert.

Ist die zweite Ableitung  $f''$  stetig, dann haben wir

$$\frac{t^2}{2} f''(\theta t) = \frac{t^2}{2} (f''(0) + o(1))$$

d.h.

$$f(t) = f(0) + tf'(0) + \frac{t^2}{2} f''(0) + o(|t|^2) .$$

Natürlich gelten diese Überlegungen in gleicher Weise für beliebige Punkte  $t_0$  und ergeben (im Fall geeignet vorausgesetzter Differenzierbarkeit):

$$f(t_0 + t) = f(t_0) + tf'(t_0) + \frac{t^2}{2} f''(t_0) + o(|t|^2) .$$

**1.6. Lokale Extrema und zweite Ableitungen.** Wir untersuchen die Funktion  $f$  (die wir als geeignet differenzierbar voraussetzen) und nehmen an, wir hätten (irgendwie) einen kritischen Punkt  $t_0$  ermittelt. Dann erhalten wir (wegen  $f'(t_0) = 0$ ) die Darstellung

$$f(t_0 + t) = f(t_0) + \frac{t^2}{2} f''(t_0) + o(|t|^2) .$$

Die dem Extremalprinzip analogen Überlegungen ergeben aus dieser Darstellung von  $f$  die Existenz eines  $\delta > 0$  mit der Eigenschaft

- (i)  $f''(t_0) > 0 \implies f(t_0 + t) > f(t_0)$  für alle  $0 < |t| \leq \delta$ .  
(ii)  $f''(t_0) < 0 \implies f(t_0 + t) < f(t_0)$  für alle  $0 < |t| \leq \delta$ .

Im Fall (i) besitzt die Funktion  $f$  bei  $t_0$  ein *striktes lokales Minimum* und im Fall (ii) ein *striktes lokales Maximum*.

**BEMERKUNG.** Man muss sich darüber klar sein, dass der Test (i) (bzw. (ii)) mit der zweiten Ableitung im allgemeinen **keine** Auskunft darüber gibt, ob  $f$  bei dem kritischen Punkt  $t_0$  einen *globalen* Extremwert (d.h. ein globales Maximum oder ein globales Minimum) annimmt. Der Test erlaubt nur Rückschlüsse auf *lokale* Extremwerte!

## 2. Lineare Algebra

Beim Erstellen mathematischer Modelle von Sachverhalten versucht man, die relevanten Objekte (und deren Eigenschaften) durch die Angabe von Zahlengrößen („Parametern“) aus einem *Skalarbereich*  $\mathcal{R}$  zu beschreiben, die sich auf eine gewisse Anzahl  $n$  von Grundgrößen beziehen. Ein Objekt  $X$  ist dann durch ein  $n$ -Tupel von Zahlen  $x_i \in \mathcal{R}$  charakterisiert

$$X \longleftrightarrow (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{R}^n .$$

(Die Parameter  $x_i$  heissen in geometrischer Sprechweise auch *Koordinaten* von  $X$ .) Insofern entspricht die Menge  $\mathcal{R}^n$  aller Koordinatenvektoren der Menge aller Objekte in unserem Modell. Allerdings muss man sich über folgendes klar sein:

- *Die Koordinatenvektoren sind zwar Beschreibungen der Objekte – aber nicht die Objekte selber!*

Dadurch, dass man sich bei der Beschreibung der Objekte auf andere Grundgrößen bezieht (und folglich die Objekte mit anderen Koordinatenvektoren fasst), erhält man oft eine entscheidende neue Sicht auf die Menge der Objekte, die deren strukturellen Zusammenhang deutlicher zu Tage treten lässt.

Die *lineare Algebra* untersucht als mathematische Disziplin, wie sich ein Wechsel von einem System von Bezugsgrößen („Basis“) zu einem anderen Bezugssystem auf die Koordinatendarstellung der Objekte auswirkt. Entscheidend für die praktische Bedeutung der linearen Algebra in der Anwendung von Mathematik ist die Tatsache, dass sich solche Koordinatenwechsel meist rechnerisch effizient bewältigen lassen.

**BEMERKUNG.** Die rechnerische Effizienz wird in der linearen Algebra damit erkaufte, dass man den Skalarbereich  $\mathcal{R}$  als Körper voraussetzt (im Wesentlichen: dass Skalaroperationen ( $\neq 0$ ) invertierbar sind), was die Flexibilität bei der Modellbildung oft sehr einschneidend beeinflusst. Ohne diese Voraussetzung kann jedoch typischerweise keine algorithmisch effiziente Problemlösung garantiert werden.

**Wahl des Skalarbereichs.** Vom Standpunkt der linearen Algebra aus genügt der Körper  $\mathbb{Q}$  der rationalen Zahlen als Skalarbereich, nicht nur von der Theorie sondern auch von der Praxis her: Die Parameter in konkreten Problembeschreibungen sind meist rationale Zahlen und konkrete numerische Rechnungen werden immer in  $\mathbb{Q}$  (tatsächlich sogar im Bereich  $\mathbb{N}$  der natürlichen Zahlen) ausgeführt (so sind Rechenmaschinen im wirklichen Leben nun einmal konstruiert).

Für die allgemeine Strukturanalyse nichtlinearer Modelle ist es jedoch bequem, Begriffe wie *Stetigkeit* oder *Differenzierbarkeit* zur Verfügung zu haben: das erspart einem die aufwendige Pflicht, immer explizit von entsprechenden Approximationen mit rationalen Zahlen reden zu müssen, die eigentlich der Analyse zugrunde liegen. Das setzt jedoch andererseits voraus, dass wir statt  $\mathbb{Q}$  unserer Diskussion die Menge  $\mathbb{R}$  aller reellen Zahlen zugrunde legen.

In der mathematischen Programmierung werden wir deshalb im allgemeinen den Körper  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen als Skalarbereich annehmen. **AUSNAHME** ist die *diskrete Optimierung*, in der die Probleme entscheidend von der Parameterwahl aus dem Bereich  $\mathbb{Z}$  der ganzen Zahlen bestimmt sind.

**2.1. Vektoren und Matrizen.** Mit  $\mathbb{R}^{m \times n}$  bezeichnen wir die Menge aller Matrizen  $A = (a_{ij})$  mit  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Die Skalare  $a_{ij} \in \mathbb{R}$  sind die *Koeffizienten* der Matrix  $A$ .  $\mathbb{R}^{1 \times n}$  ist die Menge aller  $n$ -dimensionalen *Zeilenvektoren* und  $\mathbb{R}^{m \times 1}$  die Menge aller  $m$ -dimensionalen *Spaltenvektoren*.  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  kann man somit entweder als eine Menge  $m$  Zeilenvektoren der „Länge“  $n$  oder als eine Menge von  $n$  Spaltenvektoren der Länge  $m$  auffassen.

Schreiben wir die Zeilenvektoren von  $A$  als Spaltenvektoren (bzw. die Spaltenvektoren von  $A$  als Zeilenvektoren) in der gleichen Reihenfolge, so erhalten wir die zu  $A$  *transponierte* Matrix  $A^T = (a_{ji}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ :

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \dots & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Aus Gründen der Klarheit der Notation ist es vorteilhaft, sich darauf zu einigen, ob man mit „Vektor“ einen Zeilenvektor oder einen Spaltenvektor meint. Wir folgen deshalb der Mehrheit (der Mathematiker) und verstehen unter einem „Vektor“  $\mathbf{x}$  grundsätzlich einen **Spalten-Vektor**! ( $\mathbf{x}^T$  wäre folglich ein Vektor mit denselben Koeffizienten wie  $\mathbf{x}$  – aber als Zeilenvektor notiert.)

**BEMERKUNG.** Aus mathematischer Sicht wäre es oft angebrachter, sich auf *Zeilen*-Vektoren als Darstellungsnorm zu einigen. Leider scheint sich dies aber gegen die Masse der etablierten Mehrheit auf der Welt nicht durchsetzen zu lassen...

Ausserdem ist man ohnehin oft schlampig und schreibt Koordinaten-Vektoren nach Lust und Laune mal so und mal so, wie es einem am besten passt.

Nach der obigen Vereinbarung verstehen wir unter  $\mathbb{R}^n$  einfach die Menge aller Koordinatenvektoren mit  $n$  Koeffizienten (die wir grundsätzlich uns als Spaltenvektoren notiert vorstellen wollen).

**2.2. Elementare Operationen.** Skalare kann man addieren und multiplizieren. Diese „elementaren Operationen“ setzt man komponentenweise auf Matrizen (und insbesondere natürlich Koordinatenvektoren) fort:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Unter einer *elementaren Zeilenoperation* bzgl. eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  versteht man eine der folgenden:

- (ZO.1) Multiplikation eines Zeilenvektors von  $A$  mit einem Skalar  $\lambda \neq 0$ .
- (ZO.2) Addition einer Zeile von  $A$  zu einer anderen.
- (ZO.3) Vertauschen von zwei Zeilen von  $A$ .

**BEMERKUNG.** Rechnerisch wichtig sind nur die Operationen (ZO.1) und (ZO.2). Die Operation (ZO.3) ist vor allem für das menschliche Auge gedacht, damit die Matrix in einer visuell besonders eingängige Form angegeben werden kann.

Die *elementaren Spaltenoperationen* auf  $A$  sind (per Definition) genau die elementaren Zeilenoperationen auf der Transponierten  $A^T$ .

**2.3. Matrixmultiplikation.** Ist  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  eine Matrix mit den  $m$  Zeilenvektoren  $A_{(1)}, \dots, A_{(m)}$  und  $\mathbf{y}^T = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^{1 \times m}$ , dann ist der Zeilenvektor

$$\mathbf{y}^T A := y_1 A_{(1)} + \dots + y_m A_{(m)}$$

die entsprechende Linearkombination der Zeilen von  $A$ . Völlig analog definiert der Koordinatenvektor  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  eine entsprechende Linearkombination der Spaltenvektoren  $A_{(1)}, \dots, A_{(n)}$  von  $A$ :

$$\mathbf{A}\mathbf{x} := A_{(1)}x_1 + \dots + A_{(n)}x_n = (\mathbf{x}^T A^T)^T.$$

Linearkombinationen setzen sich also aus wiederholten elementaren Operationen zusammen (wobei wir der Bequemlichkeit in der Notation halber auch Multiplikation mit dem Skalar 0 zulassen).

**DUALE SICHTWEISE:** Die  $i$ -te Komponente des Vektors  $A\mathbf{x}$  ist das *innere Produkt* der  $i$ -ten Zeile von  $A$  mit  $\mathbf{x}$ :

$$A_{(i\cdot)}\mathbf{x} = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n .$$

Ist  $B = [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k] \in \mathbb{R}^{n \times k}$  eine Matrix mit den  $k$  Spaltenvektoren  $\mathbf{b}_j \in \mathbb{R}^n$  dann setzt man

$$AB := [A\mathbf{b}_1, \dots, A\mathbf{b}_j, \dots, A\mathbf{b}_k] \in \mathbb{R}^{m \times k} .$$

Die  $j$ -te Spalte der Matrix  $AB$  ist also gerade die Linearkombination der Spalten von  $A$  gemäss dem Koeffizientenvektor  $\mathbf{b}_j$ .

**DUALE SICHTWEISE:** Die  $i$ -te Zeile von  $AB$  ist gerade die Linearkombination der Zeilen von  $B$  gemäss der Koeffizienten des Zeilenvektors  $A_{(i\cdot)}$ .

**2.4. Die fundamentalen Teilräume einer Matrix.** Sei  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  eine beliebige Matrix, dann bezeichnen wir mit

$$\text{lin } A := \{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

die Menge aller Linearkombinationen der Spalten von  $A$ .  $\text{lin } A$  heisst *lineares Erzeugnis der Spaltenvektoren von  $A$*  oder einfach *Spaltenraum von  $A$* . Ganz analog definieren wir den *Zeilenraum* von  $A$  als das lineare Erzeugnis der Zeilenvektoren von  $A$ :

$$\text{lin } A^T = \{A^T\mathbf{y} \mid \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m\} \subseteq \mathbb{R}^n .$$

Der *Kern* von  $A$  ist der Teilraum

$$\ker A := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \subseteq \mathbb{R}^n .$$

Nennt man zwei Vektoren  $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$  *orthogonal*, wenn

$$\mathbf{z}^T \mathbf{x} = z_1x_1 + \dots + z_nx_n = 0 ,$$

so folgt aus diesen Definitionen sofort, dass  $\ker A$  das sog. *orthogonale Komplement* des Zeilenraums  $\text{lin } A^T$  ist:

$$\ker A = (\text{lin } A^T)^\perp := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{z}^T \mathbf{x} = 0 \text{ für alle } \mathbf{z} \in \text{lin } A^T\} .$$

Analog ist natürlich  $\ker A^T$  das orthogonale Komplement des Spaltenraums  $\text{lin } A$  von  $A$ .

**Wichtige Beobachtungen:** Geht die Matrix  $\bar{A}$  aus der Matrix  $A$  durch Anwendung einer elementaren Zeilenoperation hervor, so gilt

$$\boxed{\text{lin } \bar{A}^T = \text{lin } A^T}$$

*Der Zeilenraum einer Matrix wird also von einer (oder mehreren) elementaren Zeilenoperationen nicht beeinflusst!*

Folglich wird auch der Kern einer Matrix von Zeilenoperationen nicht berührt.



**2.5. Pivots.** Sei  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  eine Matrix mit einem Koeffizienten  $a_{kh} \neq 0$ . Ein  $(k, h)$ -Pivot auf  $A$  ist nun folgende Operation:

- (P.1) Dividiere Zeile  $k$  von  $A$  durch  $a_{kh}$ .  
 (P.2) FÜR ALLE  $i \neq k$ : Subtrahiere  $a_{ih} \times$  (neue Zeile  $k$ ) von der (alten) Zeile  $i$ .

Zeile  $k$  heisst *Pivotzeile* und Spalte  $h$  *Pivotspalte* des  $(k, h)$ -Pivots.

**Ergebnis:** Nachdem ein  $(k, h)$ -Pivot ausgeführt ist, steht in der Spalte  $h$  der  $k$ -te Einheitsvektor  $e_k \in \mathbb{R}^m$  (der an der  $k$ -ten Stelle eine 1 aufweist und sonst die Koeffizienten 0 besitzt). Da sich ein Pivot aus elementaren Zeilenoperationen zusammensetzt, haben sich Zeilenraum und Kern der Matrix nicht verändert.

**2.6. Der GAUSS-Algorithmus.** Durch Pivotoperationen wird die Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  in eine geschickte Form überführt.

**Algorithmus:** FÜR  $k = 1, \dots, m$ : Wähle, falls möglich, ein Pivotelement  $a_{kh} \neq 0$  in Zeile  $k$  und führe einen  $(k, h)$ -Pivot aus.

Unter dem *Rang*  $r = \text{rg } A$  der Matrix  $A$  versteht man die Anzahl der ausgeführten Pivots im vorhergehenden Algorithmus. Sind  $h_1, \dots, h_r$  die Pivotspalten und bezeichnen wir mit  $B \in \mathbb{R}^{m \times r}$  die aus den entsprechenden Spalten bestehende Teilmatrix von  $A$ , so erzielt der GAUSS-Algorithmus schematisch folgendes Resultat:

$$A = [ * \mid B \mid * ] \quad \longrightarrow \quad \bar{A} = \left[ \begin{array}{c|c|c} * & I_r & * \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

(Hier haben wir die Zeilen am Ende des Algorithmus so vertauscht, dass an der Stelle von  $B$  die ersten  $r$  Zeilen aus der  $(r \times r)$ -Einheitsmatrix  $I_r$  bestehen. An den mit „\*“ gekennzeichneten Teilen stehen nicht weiter spezifizierte Matrixeinträge. Die letzten  $m - r$  Zeilen von  $\bar{A}$  sind jeweils 0-Vektoren.)

Aus der Endform  $\bar{A}$  liest man sofort ab: Die ersten  $r$  Zeilen von  $\bar{A}$  bilden eine Basis des Zeilenraums  $\text{lin } A^T$ , d.h.

$$\text{lin } \bar{A}^T = \text{lin } A^T \quad \text{und} \quad \text{rg } A = \dim \text{lin } A^T .$$

Ausserdem erkennt man, dass  $B$  eine Basis für den Spaltenraum  $\text{lin } A$  von  $A$  ist (s. nächster Abschnitt). Also findet man:

$$\boxed{\dim(\text{lin } A^T) = \text{rg } A = \dim(\text{lin } A)}$$

**2.7. Matrixbeschreibung von elementaren Operationen.** Eine elementare Zeilenoperation auf der Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  entspricht einer Multiplikation der Matrix  $A$  mit einer Matrix  $Z \in \mathbb{R}^{m \times m}$  von links:

$$A \quad \longrightarrow \quad ZA .$$

Um  $Z$  zu bestimmen, brauchen wir bloss *die gleiche* Operation auf der Einheitsmatrix  $I_m$  auszuführen, denn es gilt ja trivialerweise

$$A = I_m A \quad \text{und deshalb:} \quad ZA = (ZI_m)A .$$

Da alle elementaren Zeilenoperationen umkehrbar sind, ist natürlich  $Z$  eine invertierbare Matrix. Entsprechend finden wir, dass die elementaren Spaltenoperationen auf  $A$  der Multiplikation mit invertierbaren Matrizen von rechts entsprechen.

Die Matrixnotation ist also nichts anderes als eine Kurzfassung für eine Reihe von Zeilen- bzw. Spaltenoperationen.

Fassen wir die Wirkung des GAUSSalgorithmus in der (invertierbaren!) Matrix  $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$  zusammen, so können wir das Ergebnis des Algorithmus beschreiben als

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n} \longrightarrow \bar{A} = QA \in \mathbb{R}^{m \times n} .$$

Insbesondere erkennen wir für die Spaltenräume  $\text{lin } \bar{A}$  und  $\text{lin } A$ :

$$\text{lin } \bar{A} = \{Q\mathbf{b} \mid \mathbf{b} \in \text{lin } A\} \quad \text{bzw.} \quad \text{lin } A = \{Q^{-1}\bar{\mathbf{b}} \mid \bar{\mathbf{b}} \in \text{lin } \bar{A}\} .$$

Also ist  $B$  eine Basis von  $\text{lin } A$  genau dann, wenn  $\bar{B} = QB$  eine Basis von  $\text{lin } \bar{A}$  ist. Transformiert der GAUSSalgorithmus die Teilmatrix  $B$  der Matrix  $A$  gemäß

$$B \longrightarrow \bar{B} = QB = \begin{bmatrix} I_r \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} ,$$

so ist  $\bar{B}$  eine Basis von  $\text{lin } \bar{A}$  und deshalb  $B$  eine Basis von  $\text{lin } A$ . Wir sehen:

$$\boxed{\dim \text{lin } A^T = \text{rg } A = \dim \text{lin } \bar{A} = \dim \text{lin } A} .$$

Nehmen wir der Einfachheit halber an,  $A$  habe vollen (Zeilen-)Rang  $\text{rg } A = m$ . Dann ergibt sich

$$A = [ * \mid B \mid * ] \longrightarrow QA = \bar{A} = [ * \mid I_m \mid * ]$$

Wegen  $QB = I_m$  finden wir dann  $\boxed{Q = B^{-1}}$ .

BEMERKUNG. Die letzte Beobachtung führt (im Fall  $m = n$ ) auf den bekannten Algorithmus zur Inversion einer Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit dem auf die erweiterte Matrix  $[A|I_n]$  angewandten GAUSS-Verfahren:

$$[A|I_n] \longrightarrow [I_n|A^{-1}] .$$

**2.8. Lineare Gleichungssysteme.** Gegeben ist eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und ein Vektor  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ . Wir suchen einen Koeffizientenvektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  derart, dass

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} .$$

BEMERKUNG. Dieses Problem kann auch so aufgefasst werden: Gegeben ist der Koordinatenvektor  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)^T \in \mathbb{R}^m$  eines gewissen Objektes bzgl. der Standardbasis  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m\}$  im  $m$ -dimensionalen Koordinatenraum  $\mathbb{R}^m$ :

$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + \dots + b_m\mathbf{e}_m \quad (= I_m\mathbf{b}) .$$

Gesucht ist ein Koordinatenvektor  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$  für die Darstellung des Objektes unseres Interesses bzgl. der  $n$  Spaltenvektoren  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  der Matrix  $A$ :

$$\mathbf{b} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n = A\mathbf{x} .$$

OBdA nehmen wir  $\text{rg } A = m$  an und interpretieren die Lösungsaufgabe innerhalb des GAUSS-Verfahrens. Mit  $\mathbf{x}_B$  bezeichnen wir den Teilvektor von  $\mathbf{x}$ , dessen Komponenten einer Spaltenbasis  $B$  von  $A$  entsprechen.  $\mathbf{x}_N$  sei der Teilvektor der übrigen Komponenten und  $A_N$  die entsprechende Teilmatrix von  $A$ . Dann haben wir

$$\mathbf{b} = A\mathbf{x} = B\mathbf{x}_B + A_N\mathbf{x}_N \quad \text{d.h.} \quad B\mathbf{x}_B = \mathbf{b} - A_N\mathbf{x}_N .$$

Der GAUSS-Algorithmus berechnet (implizit) die inverse Matrix  $B^{-1}$  und explizit die Darstellung

$$\mathbf{x}_B = \bar{\mathbf{b}} - \bar{A}_N \mathbf{x}_N \quad \text{mit} \quad \bar{\mathbf{b}} = B^{-1} \mathbf{b} \quad \text{und} \quad \bar{A}_N = B^{-1} A_N$$

Die Gesamtheit der Lösungen des Gleichungssystems erhält man also dadurch, dass man die  $n - m = n - \text{rg } A$  Komponenten von  $x_N$  frei wählen kann und die übrigen Komponenten nach der obigen Formel für  $\mathbf{x}_B$  ergänzt. Die Masszahl

$$n - \text{rg } A = n - \dim \text{lin} A = n - \dim \text{lin} A^T$$

ist somit die Anzahl der *Freiheitsgrade* des Gleichungssystems  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ .

Wir bemerken, dass die Anzahl der Freiheitsgrade nur von der Matrix  $A$  (und nicht vom Vektor  $\mathbf{b}$ ) abhängt. Der Fall  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$  ergibt genau die Gesamtheit der Vektoren in  $\ker A$  über die Beziehung

$$\mathbf{x}_B = -\bar{A}_N \mathbf{x}_N .$$