

9. Übung zur mathematischen Spieltheorie

Abgabe am 19.12.2007 in der Übung

Achtung: Die Übung vom 20.12. kann wegen der vorlesungsfreien Zeit nicht am Donnerstag stattfinden. Eine Ersatzübung findet Mittwoch, den 19.12. um 14 Uhr am gewohnten Ort statt.

Aufgabe 33:

20 Punkte

Seien X, Y Präverbände. Dann ist jede supermodulare Funktion $u : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ differenzmonoton.

Aufgabe 34:

6+6+8 Punkte

Für ein kooperatives Spiel (N, v) sei $Z(v) := \{x \in \mathbb{R}^N \mid x(N) \leq v^*$ und $x(n) \geq v(n)$ f.a. $n \in N\}$. Offenbar ist $core(v) \subseteq Z(v)$.

Betrachten wir nun ein kooperatives 3-Personenspiel $(\{1, 2, 3\}, v)$. Wie groß ist $|Z(v)|$ für

- (a) $v(\{1\}) = v(\{2\}) = 0$, $v(\{3\}) = 1$, $v(\{i, j\}) = 2 = v(\{1, 2, 3\})$ für $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$.
- (b) $v(\{i\}) = 1$ für $i = 1, 2, 3$, $v(\{1, 2, 3\}) = 2 = v(\{i, j\})$ für $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$.
- (c) Welcher abstraktere Zusammenhang war für die Ergebnisse in (a) und (b) entscheidend? Verallgemeinern Sie die Ergebnisse aus (a) und (b) auf ein beliebiges kooperatives Spiel (N, v) zu einer Aussage über die Größe von $Z(v)$.

Hinweis zu (c): Welcher Zusammenhang bestand zwischen der Größe von $Z(v)$ und dem Verhältnis von $\tilde{v}(\{1, 2, 3\})$ zu $v(\{1\}) + v(\{2\}) + v(\{3\})$ in (a) und (b)?

Aufgabe 35:

20 Punkte

Seien M und N endliche disjunkte Mengen und $a_{ij} \geq 0$ für jedes $i \in M$ und $j \in N$ gegeben. Eine *Zuordnung* ist ein Vektor x mit Koeffizienten $x_{ij} \geq 0$ und der Eigenschaft

$$\sum_{m \in M} x_{mj} = 1 \text{ und } \sum_{n \in N} x_{in} = 1 \text{ ist f.a. } i \in M, j \in N.$$

Sei X die Menge aller Zuordnungen. Es wird ein kooperatives Spiel auf der Menge $V = M \cup N$ betrachtet. Der Wert einer Koalition $(S \cup T)$ mit $S \subseteq M, T \subseteq N$ sei definiert als

$$v(S \cup T) := \max_{x \in X} \sum_{i \in S} \sum_{j \in T} a_{ij} x_{ij}.$$

Man zeige, dass die Corevektoren dieses Spiels genau die Optimallösungen (y^*, z^*) des linearen Programms

$$\min_{y \geq 0, z \geq 0} \sum_{m \in M} y_m + \sum_{n \in N} z_n \text{ s.d. } y_i + z_j \geq a_{ij} \text{ f.a. } i \in M, j \in N.$$

Aufgabe 36:

20 Punkte

Drei Haushalte einer Straße bezahlen für eine gemeinsam bestellte Sperrmüllentsorgung insgesamt 20 Euro. Hätten die Haushalte die Sperrmüllentsorgung zu unterschiedlichen Terminen bestellt, hätten sie jeweils 8 Euro bezahlt. Hätten zumindest zwei der drei Haushalte sich einen Termin geteilt, hätten beide zusammen 12 Euro bezahlen müssen. Die entstandenen Kosten sollen nun möglichst gerecht aufgeteilt werden.

Ist der Core des zugehörigen Kostenspiels leer?