Prof. Dr. U. Faigle
J. Voss

WS 2007/08

13. Übung zur mathematischen Spieltheorie

Aufgabe 49:

Sei (N, v) ein konvexes Ertragsspiel. Zeigen Sie, dass der Shapley-Wert in $core(v)$ liegt. Gilt dies auch für konvexe Kostenspiele?

Aufgabe 50:

Sei $N := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $T := \{1, 2, 3\}$ und sei

$$v(T) = 1 \text{ und } v(S) = 0 \text{ f.a. } S \subseteq N \text{ mit } T \neq S.$$

Man berechne den Shapley-Wert von v und schreibe v als Linearkombination einfacher Funktionen.

Aufgabe 51: *(Kontexte)*

Ein Schraubenfabrikant produziert 8 verschiedene Sorten Schrauben. Diese unterscheiden sich bezüglich Länge (l), Durchmesser (d), Gewicht (g) und Schraubenkopf (sk). Die Verteilung dieser Merkmale auf die Schraubensorten ist in folgendem Kontext zusammengefasst:

	$l \leq 8$cm	$d \leq 6$cm	$g \geq 50$g	$sk =$kreuz
ω_1	1	1	0	1
ω_2	1	1	0	0
ω_3	0	1	1	0
ω_4	0	0	1	0
ω_5	1	0	1	1
ω_6	1	0	0	1
ω_7	0	1	0	1
ω_8	0	1	0	0

(a) Bestimmen Sie die Informationsfunktionen $P_\emptyset$, $P_{l,d}$ und $P_{d,g,sk}$.

(b) Ein Kunde erhält ein Paket Schrauben. Enthält das Paket Schrauben der Sorte ω^*, so können wir bezüglich der Informationsfunktion P_N die Plausibilitätswerte für eine Teilmenge N der Merkmale

$$p_\omega^N = \begin{array}{ll} \frac{1}{|P_N(\omega^*)|} & , falls \quad \omega \in P_N(\omega^*) \\ 0 & sonst \end{array}$$

definieren.
Der Kunde öffnet das Paket, welches Schlitzschrauben enthält (sk =schlitz). Zusätzlich misst er den Durchmesser einer Schraube. Dieser beträgt $8mm$.

Berechnen Sie die Entropie $H(p_\omega^N : \omega \in \Omega)$ für die drei verschiedenen Informationsfunktionen vor Begutachtung der Schraube und nach der Messung des jeweiligen Merkmals, wenn das Paket Schrauben der Sorte ω_4 enthält.

Aufgabe 52:

Sei (Ω, M, I) ein Kontext, seien $m_1, m_2, ..., m_k \in M$ und sei $P_{m_1,...,m_k}(\omega) := \{\omega' | I(\omega', m_i) = I(\omega, m_i)$ f.a. $i = 1, ..., k\}$. Sei weiter K die zugehörige Wissensfunktion. Welche der Eigenschaften (K.1)-(K.6) der Vorlesung besitzt K?

Aufgabe 53:

Betrachte das Nim-Spiel mit 5 Haufen der Größen $1, 5, 6, 22$ und 37. Berechnen Sie den Grundy-Wert des Spiels. Falls der anziehende Spieler eine Gewinnstrategie besitzt, geben Sie den ersten Zug dieses Spielers an.

Aufgabe 54:

Bestimmte Spiele lassen sich als Zahlen auffassen. Zeigen Sie:

(a) $\{1|3\} + \{0|1\} \sim \{2|3\}$

(b) $2+2 \sim 4$

Aufgabe 55:

Sei $U := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ die Auszahlungsmatrix eines Nullsummenspiels. Gibt es eine Nash-Lösung für das nicht randomisierte Spiel? Gibt es eine Nash-Lösung für das randomisierte Spiel? Falls nein, warum nicht? Falls ja, berechnen Sie eine Lösung.

Aufgabe 56:

Sei $U := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ die Auszahlungsmatrix des ersten Spielers eines randomisierten Nullsummenmatrixspiels. Bestimmen Sie eine Nash-Lösung und die zugehörige erwartete Auszahlung mit Hilfe der KKT-Bedingungen.

Aufgabe 57:

Für zwei Spieler seien die folgenden Strategiemengen gegeben:

$$X = \{1, 2\}, Y = \{1, 2, 3, 6\}$$

Dabei sei X bzgl. der natürlichen Ordnung von $\mathbb{N}$ und Y bzgl. der Teilbarkeitsrelation geordnet. Die Auszahlungsfunktion für Spieler 1 sei gegeben durch:

$$u_1(x, y) := x + y \text{ f.a. } x \in X, y \in Y.$$

Die Auszahlungsfunktion für Spieler 2 sei

$$u_2(x, y) := y - x \text{ f.a.} x \in X, y \in Y.$$

Besitzt das so definierte Spiel ein Nash-Gleichgewicht?