Prof. Dr. U. Faigle
Dipl.-Math. D. Andres

WS 2007/08

1. Übung zur mathematischen Spieltheorie

Abgabe am Freitag, den 26.10.2007 in der Vorlesung

Aufgabe 1: *(Ein Graphenfärbungsspiel)* 2+5+3 Punkte

Gegeben sind drei ungefärbte Blätter Papier. Diese werden von Spielern L und R während eines Spiels G nach folgenden Regeln entweder rot oder blau gefärbt. Blatt 1 und Blatt 2 müssen verschieden gefärbt werden. Ebenso müssen Blatt 2 und Blatt 3 verschieden gefärbt werden. Bereits gefärbte Blätter dürfen nicht noch einmal gefärbt werden. Im ersten Zug wird mit Hilfe eines Münzwurfs ein Spieler bestimmt, der ein Blatt rot oder blau färben muss. Im zweiten Zug muss L ein Blatt rot oder blau färben. Im dritten Zug wird mit Hilfe eines Münzwurfs ein Spieler bestimmt, der ein Blatt rot oder blau färben muss. Im vierten Zug muss R ein Blatt rot oder blau färben. Der erste Spieler, der seinen Zug nicht mehr ausführen kann, verliert.

(a) Ist das Spiel deterministisch?

(b) Geben Sie den Strukturgraphen $\Gamma(G)$ an.

(c) Zeigen oder widerlegen Sie: Keiner der beiden Spieler besitzt eine Gewinnstrategie.

Aufgabe 2: *(Frösche und Kröten I)* 5+5 Punkte

Ein Frosch und eine Kröte sitzen auf den Positionen 0 und 11 einer natürlichen Zahlenskala. Beide dürfen

(a) 1 oder 2 Felder, bzw.

(b) 1, 2 oder 3 Felder

gegeneinander springen, sich aber weder überspringen noch ein Feld teilen. Der Frosch ist als erster am Zug. Verloren hat, wer nicht mehr springen kann. Wer gewinnt?

Aufgabe 3: *(Frösche und Kröten II)* 10 Punkte

Ein Frosch und eine Kröte sitzen auf den Positionen $n_1 \in \mathbb{N}$ bzw. $n_2 \in \mathbb{N}$, $n_1 < n_2$. Betrachten Sie zwei Varianten des Frösche-und-Kröten-Spiels. In der ersten Variante dürfen die Tiere 1, 3 oder 4 Felder gegeneinander springen, in der zweiten Variante 1, 3, 4 oder 8 Felder gegeneinander springen. Wie oben dürfen sie sich nicht überspringen, der Frosch beginnt und verloren hat, wer nicht mehr springen kann. Zeigen Sie: Für festes n_1 und n_2 gewinnt der Frosch genau dann in der ersten Variante, wenn er in der zweiten Variante gewinnt.

Aufgabe 4: *(Verfeinerte Frösche und Kröten)* 5+5+5+5 Punkte

Sei $\varepsilon > 0$. Zwei punktförmige Spieler L und R sitzen auf den Positionen $r_1 \in \mathbb{R}$ bzw. $r_2 \in \mathbb{R}$ eines Zahlenstrahles, wobei $r_2 - r_1 > \varepsilon + 2$. Wir betrachten drei Spiele, in allen Spielen springen L und R aufeinander zu, wobei sie sich nicht überspringen dürfen und nicht auf dem selbem Punkt stehen dürfen. Wer als erster nicht mehr springen kann, verliert. Beim Springen sind folgende Distanzen zulässig:

Bei Spiel 1: $\varepsilon + \frac{1}{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Bei Spiel 2: $\frac{1}{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Bei Spiel 3: Für Spieler L wie in Spiel 1, für Spieler R wie in Spiel 2.

(a) Welche der drei Spiele sind kombinatorische Spiele?

(b) Bei welchen der drei Spiele besitzt genau einer der Spieler L oder R eine Gewinnstrategie?

(c) Welche der Spiele sind nichtdeterministisch, welche sind Nullsummenspiele?

(d) Sei $r_2 - r_1 = 3,8$ und $\varepsilon = 1$. Gibt es bei Spiel 1 ein Unentschieden oder gewinnt einer der Spieler? Wenn ja, welcher?

Hinweis: Die schriftliche Bearbeitung der Übungen darf und sollte in Zweiergruppen erfolgen.