KAPITEL 4

Information

Wir sind bisher immer implizit davon ausgegangen, dass die Spieler ihre Strategie nach der ihnen verfügbaren Information wählen. Die Wahl einer Maxmin-Strategie setzt z.B. voraus, dass der Spieler weiss, welche Strategien dem Gegenspieler zur Verfügung stehen. Dieses Wissen bestimmt dann sein eigenes Handeln.

Wir untersuchen in diesem Kapitel zunächst eine Weiterführung dieses Gedankens: Wie kann man *gegenseitiges Wissen* modellieren? Welche Konsequenzen ergeben sich aus der Tatsache, dass der andere weiss, dass man weiss, dass . . .?

Schliesslich greifen wir die Frage auf, wie man unter Berücksichtigung von gegebener (Zusatz-)Information am besten handelt. Am Beispiel von Wetten (und Investitionen) werden wir sehen, dass eine Maxmin-Strategie zwar den Verlust im schlimmsten Fall minimiert, aber langfristig nicht den optimalen Ertrag erwarten lässt. Eine im Sinn von Shannons Informationstheorie optimale Strategie wird abgeleitet werden.

1. Informations- und Wissensfunktionen

Der Grundgedanke unseres Modells soll an an einem Beispiel illustriert werden.

BEISPIEL 4.1 („Mädchen mit roten Hüten"). *n Mädchen mit Hüten sitzen in einem Raum. Sie wissen, dass die Hutfarben nur rot oder weiss sind. Jedes sieht die Farben der Hüte der anderen Mädchen – aber nicht die eigene. Ein Lehrer kommt in den Raum und sagt: „Mindestes ein Hut ist rot. Ich fange jetzt an, langsam zu zählen. Sobald jemand seine Hutfarbe weiss, möge er die Hand erheben".*

Was passiert, wenn der Lehrer nicht die Wahrheit gesprochen hat? Was passiert, wenn der Lehrer die Wahrheit gesprochen hat und es $k \geq 1$ rote Hüte im Raum gibt?

Unser Modell geht von einer fundamentalen Menge Ω von *Zuständen* aus, die dem betrachteten „Universum" möglich sind. Das Problem besteht darin herauszufinden, in welchem Zustand $\omega \in \Omega$ sich das Universum nun genau befindet.

1.1. Informationsfunktionen. Wir nehmen an, dass ein Spieler möglicherweise den Zustand ω, in dem sich das Universum befindet, nicht mit Sicherheit erkennt, aber wenigstens eine Teilmenge $P(\omega) \subseteq \Omega$ von Kandidaten für ω aussondern kann.

Unter einer *Informationsfunktion* versteht man allgemein einer Funktion

$$P : \Omega \to 2^{\Omega} .$$

Oft wird man annehmen, dass für alle $\omega, \omega' \in \Omega$ gilt:

(P.1) $\omega \in P(\omega)$.
(P.2) $\omega' \in P(\omega) \quad \Longrightarrow \quad P(\omega') = P(\omega)$.

Unter einer *strikten* Informationsfunktion verstehen wir eine Funktion P mit den Eigenschaften $(P.1)$ und $(P.2)$. Wenn P strikt ist, dann gibt P im wesentlichen eine Äquivalenzrelation auf Ω wider:

$$\omega' \sim \omega \quad \Longleftrightarrow \quad P(\omega') = P(\omega) \ .$$

$P(\omega)$ beinhaltet dann die Menge der zu ω äquivalenten Zustände. Die verschiedenen Mengen $P(\omega)$ sind paarweise disjunkt und formen die sog. *Informationspartition* von Ω bzgl. P.

1.1.1. *Die Mädchen mit den roten Hüten.* Wir kodieren die möglichen Zustände des Universums der n Mädchen durch Vektoren $\omega \in \{0,1\}^n$, wobei

$$\omega_i \ = \ \begin{cases} 1 & \text{Hut von Mädchen } i \text{ ist rot,} \\ 0 & \text{Hut von Mädchen } i \text{ ist weiss.} \end{cases}$$

Zum Zeitpunkt t sei P_i^t die Informationsfunktion von Mädchen i, wobei $P_i^t(\omega)$ aus all den $(0,1)$-Vektoren ω' besteht, die als mögliche Zustände mit Sicherheit noch nicht ausgeschlossen sind und mit der Beobachtung von i vereinbar sind. Es gilt damit immer

$$|P_i^t(\omega)| \leq 2 \ .$$

Im Fall $|P_i^t(\omega)| = 1$ kennt i seine Hutfarbe zum Zeitpunkt t.

Die Bekanntgabe des Lehrer bewirkt, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ jedes Mädchen mit Sicherheit annimmt: Es gibt mindestens einen roten Hut im Raum. Meldet sich bei $t = 1$ niemand, so gilt allgemein als sicher: jedes Mädchen sieht mindestens 1 roten Hut. (*Wir gehen in dieser Analyse davon aus, dass die Mädchen dem Wort des Lehrers bedingungslos vertrauen.*)

Nehmen wir nun (per Induktion) an, dass es nach Zeitpunkt $t-1$ allgemeines Wissen unter den Mädchen darstellt, dass mindestens t rote Hüte im Raum sind. Sieht ein Mädchen nun genau $t-1$ rote Hüte, so weiss es mit Sicherheit, dass der eigene Hut rot ist, und hebt die Hand zum Zeitpunkt t. Hebt niemand die Hand, so wird es Allgemeinwissen, dass jedes Mädchen mindestens t rote Hüte sieht *usw.*

FAZIT: Sind m rote Hüte im Raum, so heben genau die Mädchen mit den roten Hüten bei $t = m$ die Hand. (Bei $t = m+1$ meinen dann natürlich auch die übrigen, ihre Hutfarbe zu kennen.)

BEMERKUNG (RATIONALES HANDELN). Die Richtigkeit der Analyse beruht auf der Annahme, dass die Mädchen alle scharf logisch mitdenken. In der Spieltheorie nimmt man immer an, dass die einzelnen Spieler in diesem Sinn *rational* handeln. d.h. nach den Regeln der mathematischen Logik agieren.

1.1.2. *Kontexte.* Informationsfunktionen ergeben sich typischerweise dadurch, dass man gewisse Eigenschaften des Zustandes ω, in dem sich das Universum momentan befindet, feststellen will. Wir gehen deshalb von einer Menge M von *Merkmalen* m aus, die ein Element $\omega \in \Omega$ besitzen kann (oder auch nicht) und betrachten die entsprechende *Inzidenzfunktion*

$$I(\omega, m) = \begin{cases} 1 & \omega \text{ zeigt das Merkmal } m \in M \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das Tripel (Ω, M, I) ist ein sog. *Kontext*. Testen wir z.B. das Vorhandensein der Merkmale $m_1, m_2 \in M$, so erhalten wir die Informationsfunktion

$$P_{m_1,m_2}(\omega) = \{\omega' \in \Omega \mid I(\omega', m_1) = I(\omega, m_1), I(\omega', m_2) = I(\omega, m_2)\}.$$

Man sieht sofort:

LEMMA 4.1. *Die Informationsfunktion P_{m_1,m_2} ist strikt (d.h. erfüllt (P.1) und (P.2)).*

$\diamond$

NOTA BENE. *Von „Information“ zu reden, ist nur innerhalb eines spezifizierten Kontextes sinnvoll!*

BEISPIEL 4.2. *Die durch den Symbolstrang* TON *repräsentierte Information hängt davon ab, ob man diesen als Wort der deutschen, der englischen oder der französischen Sprache lesen soll.*

1.2. Wissensfunktionen. Eine Teilmenge $E \subseteq \Omega$ heisse (wie in der Wahrscheinlichkeitstheorie) *Ereignis*. Befindet sich das Universum in einem Zustand $\omega \in E$, so sagt man, *das Ereignis E sei eingetreten*.

Eine Informationsfunktion P definiert die *Wissensfunktion* $K : 2^\Omega \to 2^\Omega$, die jedem Ereignis die Menge der Zustände zuordnet, deren Informationsmengen ganz in E liegen:

$$K(E) = \{\omega \mid P(\omega) \subseteq E\} \quad (E \subseteq \Omega) .$$

BEMERKUNG. $K(E)$ ist die Menge der Zustände, bei denen der Spieler aufgrund seiner Information P „mit Sicherheit“ meint, das Ereignis E sei eingetreten.

Ein Ereignis $E \subseteq \Omega$ ist *evident* für der Spieler mit Informationsfunktion P, wenn das Eintreten von E auch mit Sicherheit so registriert wird, d.h. wenn

$$E \subseteq K(E) .$$

Die Wissensfunktion K hat die folgenden Eigenschaften:

(K.1) $K(\Omega) = \Omega$;
(K.2) $E \subseteq F \quad\Longrightarrow\quad K(E) \subseteq K(F)$;
(K.3) $K(E \cap F) = K(E) \cap K(F)$.

Erfüllt die Informationsfunktion P die Bedingung (P.1), so haben wir immer $\omega \in P(\omega)$ und deshalb insbesondere

(K.4) $K(E) \subseteq E$.

BEMERKUNG. (K.4) ist das *Verlässlichkeitsaxiom* und besagt, dass E auch tatsächlich eingetreten ist, wenn der Spieler sich sicher ist, dass E eingetreten sei. (Man beachte: Wir unterscheiden hier immer zwischen dem, was tatächlich der Fall ist, und dem, was der Spieler *mit Sicherheit annimmt*, dass es der Fall sei.)

Unter der Annahme (P.1) sind die evidenten Ereignisse somit genau die Mengen in dem System

$$\mathcal{K}(\Omega) = \{E \subseteq \Omega \mid K(E) = E\} .$$

Allgemein kann der Spieler ein Ereignis $E \in \mathcal{K}(\Omega)$ so interpretieren: *Genau dann, wenn E eingetreten ist, weiss ich sicher, dass E eingetreten ist.* Ist P strikt, so gilt

$$P(\omega) = K(P(\omega)) \quad \text{für alle } \omega \in \Omega$$

und wir folgern die Eigenschaft

(K.5) $K(K(E)) = K(E)$ für alle $E \subseteq \Omega$.

BEMERKUNG. (K.5) ist als *Transparenzaxiom* bekannt: *„Wenn ich mit Sicherheit meine, dass E eingetreten sei, dann weiss ich mit Sicherheit, dass ich E als eingetreten betrachte.“*

Ebenso sieht man, dass eine strikte Informationsfunktion auch zu folgender Eigenschaft führt:

(K.6) $\Omega \setminus K(E) = K(\Omega \setminus K(E))$ für alle $E \subseteq \Omega$.

BEMERKUNG. (K6.) ist das sog. *Axiom der Weisheit*: Wenn der Spieler nicht mit Sicherheit weiss, dass E eingetreten ist, dann ist er sich seiner Unsicherheit voll bewusst.