Graphentheorie

Rainer Schrader

Zentrum für Angewandte Informatik Köln

11. Dezember 2007

Kardinalitätsmatchings

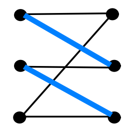
Kardinalitätsmatchings

Gliederung

- **Matchings in bipartiten Graphen**
- Matchings in allgemeinen Graphen
- Edmonds' Matching-Algorithmus
- Varianten des Matching-Problems
- Das Chinese-postman-Problem

Kardinalitätsmatchings

- wir wenden uns jetzt einem weiteren Optimierungsproblem zu
- es ist eng verwandt sind mit dem Netzwerk-Fluss-Problemen
- sei dazu $G = (V, E)$ ein Graph und $M \subseteq E$
- M heißt **Matching** von G, falls keine zwei Kanten von M einen gemeinsamen Endknoten haben



- wir suchen Matchings maximaler Kardinalität
- die gewichtete Version, bei denen Gewichte auf den Kanten liegen und Matchings maximalen Gewichts gesucht sind, werden wir nicht betrachten.

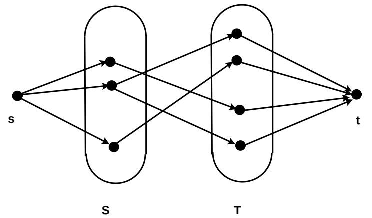
Kardinalitätsmatchings

- das Matchingproblem in bipartiten Graphen lässt sich auf ein Flussproblem zurückführen
- sei dazu $G = (S \cup T, E)$ ein bipartiter Graph
- wir ordnen G ein Netzwerk $D(W, A)$ wie folgt zu:

$$W = S \cup T \cup \{s, t\}$$
$$A = \{(u, v) : u \in S, v \in T\} \cup \{(s, u) : u \in S\} \cup \{(v, t) : v \in T\}$$

$c(a) = 1$ für alle Kanten der Form $a = (s, u)$ und $a = (v, t)$

$c(a) = \infty$ sonst



Kardinalitätsmatchings

Lemma 1

Jedem Matching M in G entspricht eineindeutig ein ganzzahliger Fluss f in D mit $|f| = |M|$.

Beweis:

- sei M ein Matching in G
- die Menge der von M überdeckten Knoten sind:

$$\begin{aligned} S' &= \{v \in S : (v, u) \in M \text{ für ein } u \in T\}, \\ T' &= \{u \in T : (v, u) \in M \text{ für ein } v \in S\} \end{aligned}$$

- definiere f wie folgt:

$$f(u, v) = \begin{cases} 1, & \text{falls } u = s, v \in S' \\ 1, & \text{falls } (u, v) \in M \\ 1, & \text{falls } u \in T', v = t \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

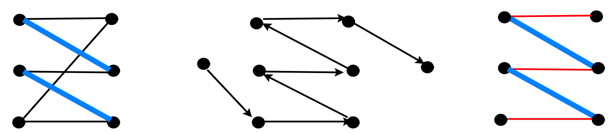
- dann ist f ein Fluss mit $|f| = |M|$

Kardinalitätsmatchings

- sei umgekehrt f ein ganzzahliger Fluss in D
- in jeden Knoten von S fließt höchstens eine Einheit hinein
- an jedem Knoten von T fließt höchstens eine Einheit heraus
- damit bilden die Knoten zwischen S und T, über die ein positiver Fluss fließt, ein Matching M mit $|M| = |f|$. □

Kardinalitätsmatchings

- wie übertragen sich augmentierende Wege von D nach G ?
- zur Veranschaulichung betrachte wir das folgende Matching



- daraus ergibt sich ein augmentierender Weg in D_f
- der wiederum überträgt sich in einen Weg im ursprünglichen Graphen

Kardinalitätsmatchings

- sei $G = (V, E)$ ein (nicht notwendigerweise bipartiter) Graph,
- sei $M \subseteq E$ ein Matching
- sei $P \subseteq E$ ein einfacher Weg in G
- P heißt **alternierend**, falls P abwechselnd Matching- und Nichtmatching-Kanten enthält
- ein Knoten heißt **exponiert**, falls er mit keiner Matchingkante inzidiert
- P heißt **augmentierend** (bzgl. M), falls P alternierend ist und seine beiden Endknoten exponiert sind
- für bipartite Graphen entsprechen die augmentierenden Wege in G genau den augmentierenen Wegen in D_f
- als unmittelbare Konsequenz ergibt sich:

Kardinalitätsmatchings

Korollar 2

Ein Matching in einem bipartiten Graphen ist genau dann maximal, wenn es keinen augmentierenden Weg gibt. □

- wir wollen uns noch überlegen, wie sich der Dualitätssatz überträgt
- sei dazu $G = (S \cup T, E)$ ein bipartiter Graph
- sei $X \subseteq S \cup T$ eine Teilmenge von Knoten
- X heißt **Knotenüberdeckung** von G, falls jede Kante mindestens einen Endknoten in X hat
- da in einem Matching M keine zwei Kanten inzidieren, gilt stets $|M| \leq |X|$

Kardinalitätsmatchings

Satz 3 (König, Egerváry)

In einem bipartiten Graphen $G = (S \cup T, E)$ ist die maximale Kardinalität eines Matchings gleich der minimalen Kardinalität einer Knotenüberdeckung.

Beweis:

- jedem Matching in G entspricht eine Menge knotendisjunkter (s, t)-Wege in D
- jede Knotenüberdeckung entspricht einer Menge von Knoten, die s und t trennen
- damit folgt die Behauptung aus dem Satz von Menger. □

Kardinalitätsmatchings

Korollar 4 (Hall)

Ein bipartiter Graph $G = (S \cup T, E)$ hat genau dann ein Matching, das S überdeckt, wenn $|X| \leq |N(X)|$ für alle $X \subseteq S$.

Beweis:

- die Bedingung ist offensichtlich notwendig
- zum Beweis der Umkehrung nehmen wir an, dass G kein Matching hat, das ganz S überdeckt
- nach Satz 3 hat G eine Knotenüberdeckung $X \cup Y$ mit $X \subseteq S, Y \subseteq T$ und $|X \cup Y| < |S|$
- dann gilt $N(S \setminus X) \subseteq Y$
- und somit
$$|N(S \setminus X)| \leq |Y| < |S| - |X| = |S \setminus X|$$
- d.h. die Hall-Bedingung ist verletzt. □

Kardinalitätsmatchings

- als eine weitere Folgerung ergibt sich:
- ein Matching heißt **perfekt**, wenn jeder Knoten des Graphen Endknoten einer Matchingkante ist

Korollar 5 (Frobenius)

Ein bipartiter Graph $G = (S \cup T, E)$ hat genau dann ein perfektes Matching, wenn $|S| = |T|$ und $|X| \leq |N(X)|$ für alle $X \subseteq S$. □

Beweis:

- nach dem Satz von Hall kann S überdeckt werden
- wegen $|S| = |T|$ ist das überdeckende Matching perfekt
- existiert umgekehrt ein perfektes Matching, so folgt $|S| = |T|$
- und es wird S überdeckt
- woraus wiederum nach dem Satz von Hall der zweite Teil folgt. □

Kardinalitätsmatchings

Gliederung

Kardinalitätsmatchings

Das Korollar 2 lässt sich auf allgemeine Graphen übertragen.

Satz 6

Ein Matching M ist genau dann maximal, wenn kein augmentierender Weg bzgl. M existiert.

Beweis:

- die Bedingung ist sicherlich notwendig
- sei umgekehrt M ein nicht-maximales Matching und M' ein Matching mit $|M'| = |M| + 1$

Kardinalitätsmatchings

- für jeden Knoten $v \in V$ gilt einer der folgenden Fälle:
  - **a)** v ist exponiert bzgl. M und M' bzw. v inzidiert mit einer Kante aus $M \cap M'$
  - **b)** v inzidiert mit einer Kante aus $M \setminus M'$ bzw. einer Kante aus $M' \setminus M$
  - **c)** v inzidiert mit je einer Kante aus $M \setminus M'$ und $M' \setminus M$
- sei $F = M \triangle M' = (M \setminus M') \cup (M' \setminus M)$ die symmetrische Differenz
- der Graph (V, F) besteht damit aus
  - isolierten Knoten
  - Kreisen gerader Länge
  - isolierten Kanten oder Wegen, die zwischen M und M' alternieren

Kardinalitätsmatchings

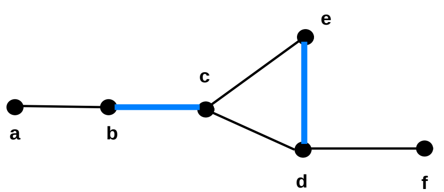
- $|F|$ ist ungerade, da
$$|F| = |M| + |M'| - 2|M \cap M'| = 2|M| + 1 - 2|M \cap M'|$$
- da $|F|$ ungerade ist, muss ein alternierender Weg ungerader Länge existieren
- da $|M'| > |M|$, muss dies auch ein augmentierender Weg bzgl. M sein. □

Kardinalitätsmatchings

- eine naheliegende Idee, augmentierende Wege zu finden, ist ein modifiziertes Suchverfahren:
  - starte in einem exponierten Knoten
  - suche auf alternierenden Wegen
  - bis ein weiterer exponierter Knoten erreicht wird
- für bipartite Graphen funktioniert dieses Vorgehen
- bei nicht-bipartiten Graphen können ungerade Kreise Probleme bereiten

Kardinalitätsmatchings

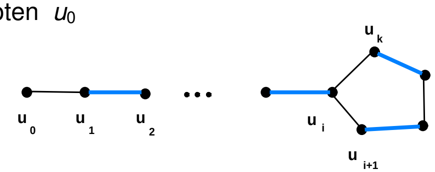
- im folgenden Graphen kommt es darauf an, in welcher Orientierung wir das Dreieck umlaufen:



- a, b, c, d liefert keinen augmentierenden Weg,
- a, b, c, e, d, f jedoch tut es
- wenn wir in c ankommen, wissen wir aber noch nicht, wo wir den Kreis wieder verlassen werden.

Kardinalitätsmatchings

- sei $P = (u_0, \ldots, u_k)$ ein alternierender Pfad beginnend in einem exponierten Knoten u_0



- die Knoten mit geradem Index heißen **gerade**, die anderen **ungerade**
- sind u_i, u_k gerade und ist $(u_i, u_k) \in E$, so heißt
  - der ungerade Kreis $u_i, u_{i+1}, \ldots, u_k$ **Blüte**,
  - u_i seine **Basis**,
  - und $(u_0, \ldots, u_{i-1})$ **Stamm**
- wir schrumpfen die Blüte B zu einem neuen Knoten b und entfernen Mehrfachkanten
- sei G' der so entstandene Graph und M' das induzierte Matching

Kardinalitätsmatchings

Satz 7

G' enthält einen augmentierenden Pfad genau dann, wenn G einen augmentierenden Pfad enthält.

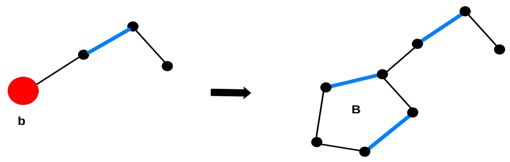
Beweis:

- sei P' ein augmentierender Pfad in G'
- ist $b \notin P'$, so ist nichts zu zeigen
- andernfalls ist
  - **(i)** b entweder exponiert oder
  - **(ii)** P' enthält auch die zu b inzidente Matchingkante des Stamms von B in G

Kardinalitätsmatchings

(i) dann gilt:

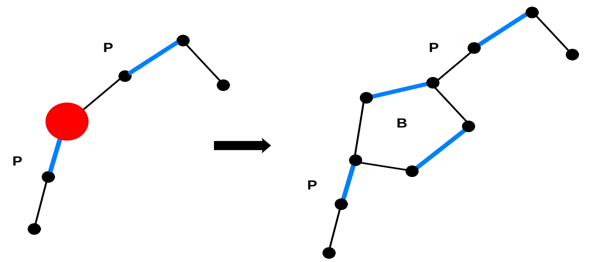
- der Stamm von B ist leer
- B enthält einen alternierenden Pfad P:
- P beginnt in der Basis von B
- P endet in der Matchingkante, die mit dem Knoten inzidiert, über den die erste Kante von P' läuft



- dann ist $P \cup P'$ alternierend in G.

Kardinalitätsmatchings

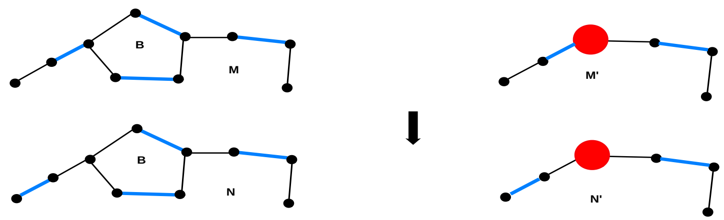
(ii) dann hat B einen nicht-leeren Stamm, der zusammen mit einem Teil des Kreises einen augmentierenden Pfad ergibt:



- sei umgekehrt M' optimal in G'
- angenommen M ist nicht optimal in G

Kardinalitätsmatchings

- seien N' und N die Matchings , die entstehen, wenn wir auf dem Stamm von B die Rolle der Matching- und der Nicht-Matching-Kanten vertauschen



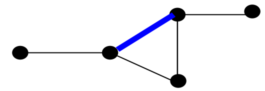
- da der Stamm eine gerade Anzahl von Knoten hat, gilt $|N| = |M|$ und $|N'| = |M'|$ und N' ist ebenfalls optimal in G'
- in N ist nun der Knoten u_0 gematcht und u_i exponiert
- entsprechend ist b in N' nicht gematcht

Kardinalitätsmatchings

- da N nicht optimal ist, existiert in G ein augmentierender Pfad P, der zwei exponierte Knoten x, y verbindet
- P muss Knoten von B benutzen, da er sonst auch ein augmentierender Pfad in G' wäre ($\lightning$ zur Maximalität von N')
- weiter muss mindestens ein Knoten x außerhalb von B liegen
- sei P' der Teilpfad von P, der x mit dem ersten Knoten in B verbindet
- dann ist P' ein augmentierender Pfad in G', im Widerspruch zur Annahme. $\square$

Kardinalitätsmatchings

- es ist wichtig, dass die Basis der Blüte einen geraden Index hat:



- der Graph enthält einen augmentierenden Weg,
- der jedoch mit dem Schrumpfen des Dreiecks verschwindet.

Kardinalitätsmatchings

Gliederung

- Matchings in bipartiten Graphen
- Matchings in allgemeinen Graphen
- **Edmonds' Matching-Algorithmus**
- Varianten des Matching-Problems
- Das Chinese-postman-Problem

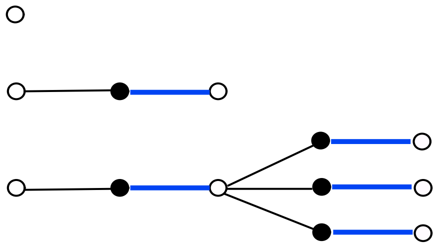
Kardinalitätsmatchings

- der letzte Satz ist die Basis für Edmonds' Matching-Algorithmus
- er schrumpft gefundene Blüten,
- berechnet rekursiv im reduzierten Graphen ein Matching
- und bläst danach Blüten und Matchings wieder auf

- das Verfahren startet mit dem leeren Matching M
- zu einem bereits konstruierten Matching M baut es einen speziellen Wald als Teilgraph von G auf
- ein Knoten in einem Baum heißt
  - **gerade**, wenn sein Abstand zur Wurzel gerade ist
  - **ungerade** sonst
- insbesondere ist die Wurzel ein gerader Knoten

Kardinalitätsmatchings

- ein **alternierender Wald** F erfüllt die folgende Bedingungen:
  - jeder exponierte Knoten liegt in $V(F)$
  - jede Zusammenhangskomponente enthält genau einen exponierten Knoten, der die Wurzel eines Baums bildet
  - alle ungeraden Knoten haben Grad zwei in F
  - für jeden Knoten $v \in V(F)$ ist der Weg $P(v)$ zurück zu seiner Wurzel ein alternierender Weg



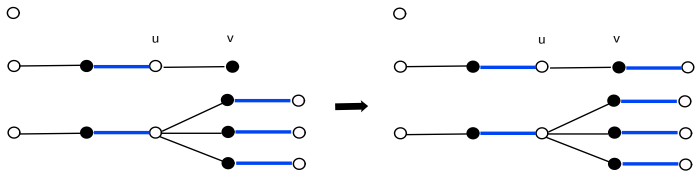
Kardinalitätsmatchings

- zu Beginn besteht der Wald nur aus den exponierten Knoten
- sei $u \in V(F)$ eine gerader Knoten
- sei $v \in N_G(u) \setminus N_F(u)$ ein Nachbar in G, der nicht auch schon Nachbar in F ist
- dann ist die Kante (u, v) keine Matchingkante
- wir unterscheiden drei Fälle:

Kardinalitätsmatchings

(i) $v \notin V(F)$:

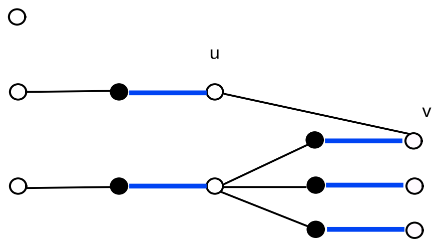
- dann ist insbesondere v nicht exponiert



- füge die Kante (u, v) sowie die zu v inzidente Matchingkante zu F hinzu

Kardinalitätsmatchings

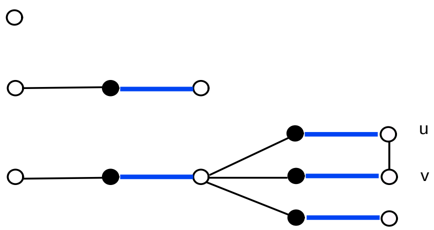
(ii) $v \in V(F)$ gerade und in einem anderen Baum als u:



- dann bildet $P(u), (u, v), P(v)$ einen augmentierenden Weg

Kardinalitätsmatchings

(iii) $v \in V(F)$ gerade und im selben Baum wie u:



- sei x der erste Knoten in $P(u) \cap P(v)$ von u aus gesehen
- dann ist x entweder die Wurzel oder hat Grad mindestens drei
- damit ist x ebenfalls ein gerade Knoten
- dann bilden die Anfangsstücke von $P(u)$ und $P(v)$ bis x zusammen mit (u, v) eine Blüte
- schrumpfe die Blüte und iteriere

Kardinalitätsmatchings

- wenn keiner dieser Fälle eintritt, hat jeder gerade Knoten in $V(F)$ nur ungerade Knoten als Nachbarn
- in diesem Fall bleibt zu zeigen, dass das Matching maximale Kardinalität hat
- wir argumentieren wieder über eine Dualitätsaussage
- dazu sei $X \subseteq V$ eine Teilmenge von Knoten
- sei $o_G(X)$ die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von $G \setminus X$, die eine ungerade Anzahl von Knoten haben

Lemma 8

Sei M ein Matching in $G = (V, E)$ und $X \subseteq V$. Dann gilt für die Anzahl der exponierten Knoten

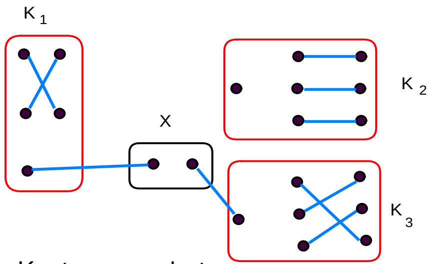
$$|V| - 2|M| \geq (o_G(X) - |X|).$$

Kardinalitätsmatchings

$$|V| - 2|M| \geq (o_G(X) - |X|).$$

Beweis:

- betrachte eine ungerade Komponente K



- M lässt in K mindestens einen Knoten exponiert
- M kann höchstens $|X|$ dieser Knoten mit Knoten in X verbinden
- damit ist für jedes $X \subseteq V$ und jedes M die Anzahl der exponierten Knoten mindestens $o_G(X) - |X|$. □

Kardinalitätsmatchings

Satz 9

Das Verfahren von Edmonds berechnet maximale Matchings.

Beweis:

- sei M das Matching, mit dem der obige Algorithmus abbricht, und F der zugehörige alternierende Wald
- dann gilt offensichtlich:
  - die Anzahl exponierten Knoten ist gleich der Anzahl der Bäume,
  - die Anzahl der Bäume ist gleich der Differenz aus den Anzahlen der geraden und der ungeraden Knoten,
  - ist X die Menge der ungeraden Knoten, so besteht $G \setminus X$ aus den geraden Knoten, die alle isoliert sind

Kardinalitätsmatchings

- die Anzahl exponierten Knoten ist gleich der Anzahl der Bäume,
- die Anzahl der Bäume ist gleich der Differenz aus den Anzahlen der geraden und der ungeraden Knoten,
- ist X die Menge der ungeraden Knoten, so besteht $G \setminus X$ aus den geraden Knoten, die alle isoliert sind
- somit:

$$\begin{aligned} |V| - 2|M| &= \#\text{Anzahl der Bäume} \\ &= \#\text{Anzahl gerader Knoten} - \#\text{Anzahl ungerader Knoten} \\ &= o_G(X) - |X| \end{aligned}$$

- damit hat M genau $o(X) - |X|$ exponierte Knoten und ist wegen der schwachen Dualität aus Lemma 8 maximal. $\square$

Kardinalitätsmatchings

Wir haben damit gleichzeitig den starken Dualitätssatz bewiesen.

Korollar 10 (Tutte-Berge)

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Dann gilt:

$$2 \max\{|M| : M \text{ Matching in } G\} = \min\{|V| - (o_G(X) - |X|) : X \subseteq V\}. \quad \square$$

Insbesondere folgt für die Existenz eines perfekten Matchings:

Korollar 11 (Tutte)

Ein Graph $G = (V, E)$ hat ein perfektes Matching genau dann, wenn $o_G(X) \leq |X|$ für alle Teilmengen $X \subseteq V$. $\square$

Kardinalitätsmatchings

Gliederung

- Matchings in bipartiten Graphen
- Matchings in allgemeinen Graphen
- Edmonds' Matching-Algorithmus
- **Varianten des Matching-Problems**
- Das Chinese-postman-Problem

Kardinalitätsmatchings

- auch gewichtete Versionen des Matching-Problems lassen sich formulieren und effizient lösen
- die folgenden Varianten des Matching-Problems werden unterschieden:

allgemeines Kardinalitätsmatching

- gegeben einen Graphen G
- finde ein Matching mit maximaler Kantenanzahl

gewichtetes Matchingproblem

- gegeben einen Graphen G mit Kantengewichten
- finde ein Matching maximalen Gewichts

Kardinalitätsmatchings

perfektes Matchingproblem, Zuordnungsproblem

- gegeben einen Graphen G mit Kantengewichten
- finde ein perfektes Matching minimalen oder maximalen Gewichts
- bzw. entscheide, dass es kein perfektes Matching gibt

b-Matching-Problem

- gegeben einen Graphen G mit Kantengewichten
- und für jeden Knoten eine Größe $b(v) \in \mathbb{N}$
- bestimme eine Teilmenge von Kanten maximalen Gewichts,
- so dass in jedem Knoten höchstens $b(v)$ dieser Kanten inzidieren.

Kardinalitätsmatchings

Transportproblem

- gegeben m Anbieter eines Guts mit Angebotsmengen $a_1, \ldots, a_m$
- n Nachfrager dieses Guts mit Nachfragemengen $b_1, \ldots, b_n$
- dabei soll gelten: $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$,
- weiter seien c_{ij} Transportkosten
- wähle Transportmengen x_{ij} so, dass gilt:

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{j=1}^n x_{ij} &= a_i \\ \textstyle\sum_{i=1}^m x_{ij} &= b_j \end{aligned}$$

- und $\sum c_{i,j} x_{ij}$ minimal ist

Kardinalitätsmatchings

Gliederung

- Matchings in bipartiten Graphen
- Matchings in allgemeinen Graphen
- Edmonds' Matching-Algorithmus
- Varianten des Matching-Problems
- **Das Chinese-postman-Problem**

Kardinalitätsmatchings

- wir haben jetzt alle Zutaten beisammen, um das Chinese-Postman-Problem zu lösen
- sei $G = (V, E)$ ein Graph bestehend aus den Straßenzügen, die der Briefträger ablaufen muss
- die Kanten seien mit den jeweiligen Längen bewertet
- gesucht ist ein Weg, der mindestens einmal jede Straße entlang führt, zum Ausgangspunkt zurückkehrt und kürzeste Länge hat.

Kardinalitätsmatchings

- ist G eulersch, so ist jede Eulertour optimal
- andernfalls dupliziere Kanten von G so, dass
  - ein Graph $G^* \supseteq G$ entsteht, der eulersch ist
  - und das Gesamtgewicht der Kanten, die dupliziert werden, minimal ist
- dabei muss für jeden Knoten $v \in V$ gelten:
  - hat v ungeraden Grad, so wird eine ungerade Anzahl von Kanten, die mit v inzidieren, hinzugefügt
  - hat v geraden Grad, so wird eine gerade Anzahl neuer Kanten hinzugefügt.

Kardinalitätsmatchings

- daher entsteht G^* aus G, indem Pfade hinzugefügt werden, die zwei ungerade Knoten verbinden
- um die kürzeste chinese-postman-Tour zu bestimmen, müssen wir also die $2k$ ungeraden Knoten so zu Paaren $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$ zusammenfassen, dass $\sum_{i=1}^{k} \mathrm{dist}(x_i, y_i)$ minimal ist.

Kardinalitätsmatchings

Dies führt zu folgendem Verfahren:

(1) ist G eulersch, setze $G^* = G$ und gehe zu (7)

(2) andernfalls sei $U \subseteq V$ die Menge der Knoten mit ungeradem Grad

(3) zwischen je zwei Knoten $u, v \in U$ sei $P(u, v)$ ein kürzester Weg in G der Länge $\mathrm{dist}(u, v)$

(4) konstruiere einen vollständigen Graphen G' auf $|U|$ Knoten mit Kantenbewertung $\mathrm{dist}(u, v)$

(5) berechne ein minimales perfektes Matching M in G'

(6) für jede Kante $(u, v) \in M$, konstruiere G^* aus G, indem die Kanten von $P(u, v)$ hinzugefügt werden

(7) jede Eulertour von G^* ist Lösung des chinese-postman-Problems.