Prof. Dr. R. Schrader
Birgit Engels [engels@zpr.uni-koeln.de]

WS 2006/2007

Theoretische Informatik

4. Übung, Abgabe Mittwoch, 15.11.2006

Aktuelle Informationen bezüglich der Vorlesung und der Übungen finden sich unter :
http://www.zaik.uni-koeln.de/AFS/teachings/courses/ThInf/index.html und
http://www.zaik.uni-koeln.de/AFS/teachings/courses/ThInf/uebungen.html

Aufgabe 15 (NP-Vollständigkeit, polynomielle Reduktion — 10 Punkte):
Wir wollen zeigen, dass folgendes Problem NP-vollständig ist:

> **3-Färbbarkeit:** Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ und 3 verschiedene Farben $1, 2, 3$. Gesucht ist eine Abbildung $f : V \Rightarrow \{1, 2, 3\}$, so dass: $\forall v_i, v_{j \neq i} \in V : (v_i, v_j) \in E \Rightarrow f(v_i) \neq f(v_j)$

Unter einer *zulässigen* 3-Färbung f verstehen wir also eine Abbildung, die benachbarten Knoten je eine unterschiedliche Farbe zuweist.

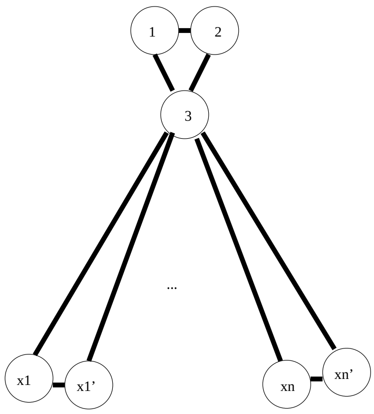

Abbildung 1: Typ a: Für jede in α vorkommende Variable x_i, werden ein Knoten x_i, sowie ein Knoten $\neg x_i (= x'_i)$ mit dem mit Farbe 3 gefärbten Knoten, sowie untereinander verbunden.

a) Begründen Sie **3-Färbbarkeit** $\in NP$.

b) Assoziieren Sie die drei Farben 1, 2 und 3 mit den "Wahrheitswerten" *true, false* und *egal*. Was stellt der Typ-A-Baustein dann sicher ?

Bitte wenden !

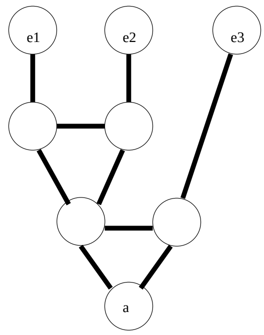

Abbildung 2: Typ b.

c) Führen Sie die Belegung mit Farben bzw. “Wahrheitswerten“ an den mit $e_i, 1 \leq i \leq 3$ markierten Knoten in Bausteintyp b fort. kann der mit a beschriftete Knoten die “Farbe“ *true* annehmen, wenn alle Knoten e_i die “Farbe“ *false* haben ? Was passiert wenn umgekehrt mindestens ein Knoten e_i die “Farbe“ *true* hat ?

d) Kombinieren Sie Bausteine vom Typ a bzw. b zu einem Graphen $G = (V, E)$, der genau dann ($\Leftrightarrow$!) 3-färbbar ist, wenn α erfüllbar ist. (Die Bausteine müssen dabei nicht ausschließlich über Kanten verbunden werden: Sie können auch “übereinander“ geschoben werden, indem Knoten einzelner Bausteine miteinander identifiziert werden.

e) Wie groß (Anzahl der Knoten, Kanten) ist G in Abhängigkeit von α (Anzahl der Variablen, Klauseln)? Warum ist dies wichtig ?

f) Konstruieren Sie explizit einen Graphen $G(\alpha)$ zum folgenden 3SAT-Ausdruck $\alpha = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_3 \vee x_4 \vee \neg x_5)$ und geben Sie eine erfüllende Belegung/zulässige Färbung an !

g) Zeigen Sie mittels der obigen Vorüberlegungen **3SAT** $\leq_{pol}$ **3-Färbbarkeit** !

Aufgabe 16 (Travelling Salesman Problem (TSP) — 7 Punkte):
In der Vorlesung wurde gezeigt, dass das TSP auf einem Graphen $G = (V, E)$ (mit Kostenfunktion $c : E \rightarrow \mathbf{R}$) NP-vollständig ist. Würden Sie dennoch glauben, dass in polynomieller Zeit eine “Lösung“ für das TSP erstellt werden kann, die höchstens doppelt so “schlecht“ (doppelt so lang) wie die optimale Tour ist ? (Geben Sie einen entsprechenden Algorithmus an oder begründen Sie, warum es diesen nicht geben kann.)
Hinweis: Wir nehmen an, dass G ungerichtet ist, insbesondere ist die Kostenfunktion c dadurch symmetrisch. Betrachten Sie einen minimalen spannenden Baum von G.

Aufgabe 17 (P vs. NP — 4 Punkte):
Zeigen Sie, dass unter der Vorraussetzung $P = NP$ (!) die Sprache $L = \{0, 1\}$ über dem Alphabeth $\{0, 1\}$ NP-vollständig ist !