

Theoretische Informatik

10. Übung, Abgabe Mittwoch, 10.01.2007

Aktuelle Informationen bezüglich der Vorlesung und der Übungen finden sich unter :

<http://www.zaik.uni-koeln.de/AFS/teachings/courses/ThInf/index.html> und

<http://www.zaik.uni-koeln.de/AFS/teachings/courses/ThInf/uebungen.html>

Aufgabe 36 (NC — Nick's Class — 4 Punkte):

In der Vorlesung wurde die Komplexitätsklasse $NC = PRAM(poly, poly(log))$ eingeführt, wobei $PRAM(poly, poly(log))$ die Klasse aller Probleme darstellt, die von polynomiell vielen parallelen RAMs entschieden werden können, wobei die Laufzeit durch ein Polynom im Logarithmus der Länge n der Eingabe beschränkt ist. Es wird allerdings auch folgende Definition genutzt:

Die Klasse **NC** ist die Klasse der (Entscheidungs-)Probleme, deren charakteristische Funktion von einem booleschen Schaltnetz S polylogarithmischer Tiefe und der Länge n der Eingabe, das aus nur aus Gattern mit maximal 2 Eingängen besteht, berechnet werden kann.

Um die Äquivalenz beider Definitionen zu zeigen, muss zum einen von einem Schaltnetz S (wie oben definiert) jede beliebige $PRAM(poly, poly(log))$ simuliert werden können und zum anderen muss für jedes solche S , die berechnete die Funktion f mit $f = S(x_1, \dots, x_n)$ ($x_i \in \{0, 1\}$ sind boolesche Variablen) von einer $PRAM(poly, poly(log))$ berechnet werden können. Erstere Simulation ist in Analogie zum Satz von Cook (Mittels des SAT-Problems kann eine Turingmaschine simuliert werden) relativ aufwendig. Zeigen Sie daher lediglich:

Die Funktion $f = S(x_1, \dots, x_n)$ wird von einem Schaltnetz S polylogarithmischer Tiefe aus booleschen Gattern mit je 2 Eingängen berechnet.

⇒

∃ PRAM, die f in polylogarithmischer Zeit mit polynomieller Anzahl von Prozessoren berechnet.

Weitere Hinweise vgl. Übung 9!

Aufgabe 37 (NC und P-Vollständigkeit — 4 Punkte):

Nach dem Lemma von Brent (siehe Vorlesung) gilt für die Klasse P : $P = PRAM(poly, poly)$. Daher gilt $NC = PRAM(poly, poly(log)) \subseteq PRAM(poly, poly) = P$ und wir haben eine Klasse von Problemen kennengelernt, die eventuell "leichtere" Probleme umfasst als P . Daher können wir nun auch sinnvoll definieren:

Bitte wenden!

Ein (Entscheidungs-)Problem L ist **P-Vollständig**, falls gilt:

$$\forall L' \in P : L' \leq_{NC} L, \text{ wobei}$$

$$L' \leq_{NC} L \Leftrightarrow \exists f : x \in L' \Leftrightarrow f(x) \in L$$

Und f kann mit einer $PRAM(poly, poly(log))$ berechnet werden (**NC-Reduktion**)!

In Aufgabe 36 wurden Schaltnetze S mit polylogarithmischer Tiefe vorgestellt. Das Problem, ob eine Funktion $f(N)$ für Schaltnetze N polynomieller Tiefe den Wert "1" oder "0" annimmt (**Circuit Value Problem**) ist P-Vollständig.

Begründen Sie, warum das **CVP** für Schaltnetze, die ausschließlich aus **NOR**- Gattern (mit der Funktionalität $\text{NOR}(x, y) = \neg x \wedge \neg y$) bestehen, ebenfalls P-vollständig ist! (Eine formale Reduktion ist nicht nötig.)

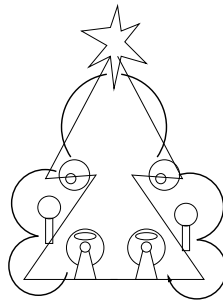


Abbildung 1: Ein korrekt geschmückter Weihnachtsbaum. Die Abfolge der Zeichenkette wird von links unten über die Spitze des Baumes nach rechts unten abgelesen, wie die Linien andeuten.

Aufgabe 37 (Korrekt geschmückte Weihnachtsbäume — 4+1 Punkte):

Die elfische Weihnachtsbaumfabrik läuft auf Hochtouren. Weihnachtsbaum um Weihnachtsbaum läuft festlich geschmückt vom Band. Nun soll automatisch sicher gestellt werden, dass die Bäumchen auch vernünftig geschmückt sind: Wir definieren dazu die Sprache L_{kgW} der korrekt geschmückten Weihnachtsbäume über dem Alphabet $\Sigma = \{Engelchen, Kerze, Christbaumkugel, Stern\}$ wie folgt:

$$L_{kgW} =$$

$$\{w | w = (Engelchen Kerze Christbaumkugel)^*(Stern)(Christbaumkugel Kerze Engelchen)^*\}$$

- a) Konstruieren Sie eine deterministische Turingmaschine, die ausschliesslich korrekt geschmückte Weihnachtsbäume akzeptiert (Nehmen Sie an, dass der Weihnachtsbaum als Zeichenkette der Schmuckstuecke vorliegt—siehe Abbildung. Der Baumschmuck kann dabei geeignet über dem üblichen Alphabet kodiert werden.)
- b) Bisher sind die akzeptierten Weihnachtsbäume zwar korrekt geschmückt, können aber insgesamt noch völlig unsymmetrisch aussehen. Wir definieren nun die Sprache der korrekt geschmückten, symmetrischen Weihnachtsbäume:

Bitte wenden!

$$L_{kgsW} =$$

$$\{w|w = (\text{Engelchen Kerze Christbaumkugel})^n(\text{Stern})(\text{Christbaumkugel Kerze Engelchen})^n\}$$

Konstruieren Sie (entsprechend Aufgabenteil a) nun eine nichtdeterministische Turingmaschine, die L_{kgsW} erkennt.

- c) Nun soll die elfische Weihnachtsbaumfabrik vor dem nächsten Weihnachtsfest einige Filialen bekommen. Damit auch wirklich gleich geschmückte Weihnachtsbäume aus allen Filialen geliefert werden, sollen die in a) und b) konstruierten Weihnachtsbaumtestmaschinen vervielfältigt werden. Konstruieren Sie eine RAM, die für entsprechende Kodierungen der vervielfältigten TMs überprüft, ob tatsächlich die gleichen Weihnachtsbäume als korrekt akzeptiert bzw. die Sprache der korrekt geschmückten (symmetrischen) Weihnachtsbäume entschieden (akzeptiert) wird.

Hinweis: Es gibt ja auch eigentlich nur *eine* elfische Weihnachtsfabrik ...

Aufgabe 38 (Entlaufene Rentiere — Komplexitätsklassen — 0,5*Klassenanzahl Punkte):

Leider sind dem Weihnachtsmann in diesem Jahr sämtliche Rentiere entlaufen und haben sich ausgerechnet im Skript der Vorlesung Theoretischen Informatik versteckt—Kein Wunder wenn diese so seltsame Namen haben wie “P“, “NP“, ... Fangen Sie die entlaufenen Rentiere ein und erstellen Sie einen Stammbaum der Rentiere!

(Erstellen Sie eine Liste aller bisher in der Vorlesung behandelten Komplexitätsklassen (nur diese werden gewertet) und geben Sie deren Beziehungen untereinander an—Ohne Beweise :-).

Aufgabe 20 (Die vermisste Aufgabe — 2 Punkte):

Tragen Sie die Lösungen in das Kreuzworträtsel ein.

Nummer	waagrecht
3	Abstrakte Maschine, die aus Delphi stammen könnte.
4	Das haben Schüler laut Pisastudie.
8	Kein Wunder, dass der gleichnamige Fernsehsender ein anspruchvolles Programm hat!
9	Nicht nur eine pikante Sosse für Taccos, Chips und Rohkost.
10	Grundlage für feine Sossen und Härtebeweise.
12	Nicht nur CSI spielt in dieser Stadt.

Nummer	senkrecht
1	P ist eine ...
2	Spielerstadt - nein, die europäische ...
4	Das macht schwierige Probleme leicht(er).
5	Erfinder einer konkurrierenden Komplexitätstheorie (mit überdurchschnittlich vielen Os).
6	Wenn nichts fehlt, ist alles ...
7	Abstrakte Maschine, bei der alles vorherbestimmt ist ...
11	Anglisischer Koch der nicht nur im Satellitenfernsehen auftritt.

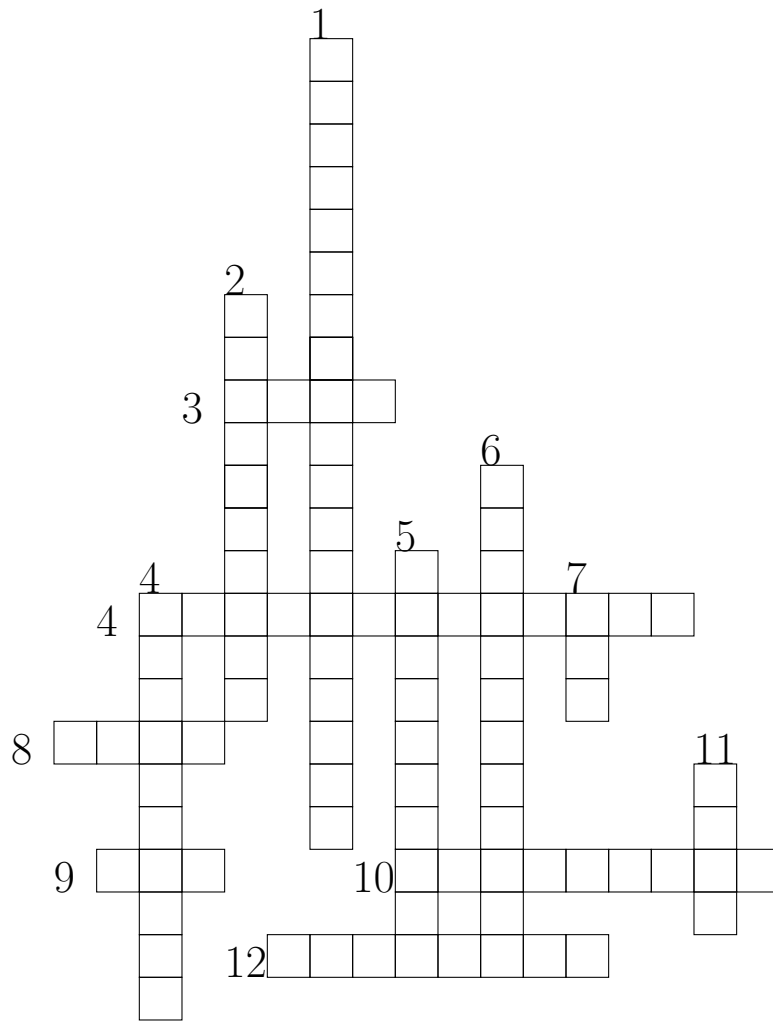


Abbildung 2:

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!